

Stochastik

**Aufgabenbeispiele zur Illustration der Kompetenzen für die Primarschule
und die erste Stufe der Sekundarschule**

Fachberatung Mathematik

Die Fachberatungsgruppe für Mathematik hat ein erstes Themenheft zum Bereich Stochastik erstellt, um die Umsetzung des Rahmenplans Mathematik zu unterstützen.

Das vorliegende Heft setzt sich zum Ziel, allen Primarschullehrern und Sekundarschullehrern der ersten Stufe einen theoretischen Einblick in die Basisbegriffe der Stochastik sowie Anregungen und Hilfen in Form von praktischen Beispielen anzubieten.

Die Leitidee des Rahmenplans ist die Kompetenzorientierung.

Die vorgestellten Aufgabenbeispiele für die drei Stufen der Primarschule sowie der Sekundarstufe I verdeutlichen, wie inhaltliche und allgemeine Kompetenzen (Kompetenzerwartungen und Kernkompetenzen) in sinnvollen Lernsituationen entwickelt werden können.

Angepasste didaktische Schrittfolgen helfen, die Kompetenzen für alle Bereiche der Stochastik umzusetzen.

Das vorliegende Themenheft gliedert sich in mehrere Teile:

Zunächst erfolgt eine kurze theoretische Einführung. Wichtige stochastische Begriffe werden in Verbindung zu Aufgabenbeispielen (gekennzeichnet als Schriftrolle mit Buch - Teil 4) erläutert. Die Bedeutung der Stochastik für die Primarschule und Sekundarschule wird anschließend erklärt (Teil 2).

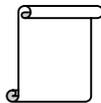
Danach erfolgt die Beschreibung der didaktischen Schrittfolge (Teil 3). Diese zeigt, wie die inhaltlichen und prozessbezogenen Kompetenzen in angepassten Lernsituationen/Kontexten umgesetzt werden können. Ausführliche Aufgabenbeispiele illustrieren diese Kompetenzorientierung im vierten Teil.

Die Anhänge schließen das Themenheft ab und dienen als Kopiervorlage für die Praxis.

Wir hoffen, mit dieser Publikation die Praktiker/innen bei ihrer anspruchsvollen Aufgabe zu unterstützen und wünschen ihnen dabei viel Erfolg und Freude.

Für zusätzliche Erklärungen bzw. Beratungen steht Ihnen die Fachberatungsgruppe Mathematik nach Absprache zur Verfügung. Anfragen sind zu richten an folgende Mail-Adresse: mathematik@ahs-dg.be

Schriftrolle mit Buch



Kurze theoretische Einführung und Zusatzerklärungen



Wolke

Weitere Ideen zu den jeweiligen Bereichen

Brille

Methodische Hinweise

Hand

Allgemeine Hinweise, Bemerkungen

Inhaltsverzeichnis

STOCHASTIK	1
AUFGABENBEISPIELE ZUR ILLUSTRATION DER KOMPETENZEN FÜR DIE PRIMARSCHULE UND DIE ERSTE STUFE DER SEKUNDARSCHULE	1
1. BEREICHE DER STOCHASTIK	4
2. WARUM STOCHASTIK IN DER PRIMARSCHULE UND IN DER ERSTEN STUFE DER SEKUNDARSCHULE?	4
2.1. Beitrag zur Umwelterschließung.....	4
2.2. Förderung der inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen (Kernkompetenzen).....	4
2.3. Interesse am Gegenstand (intrinsische Motivation)	5
2.4. Frühzeitiger Erwerb stochastischer Begriffe	5
3. DIDAKTISCHE SCHRITTFOLGE UND ÜBERBLICK DER INHALTLICHEN UND PROZESSORIENTIERTEN KOMPETENZEN IN DER STOCHASTIK	5
3.1. Didaktische Schrittfolge für die beschreibende Statistik.....	6
3.2. Didaktische Schrittfolge für die Wahrscheinlichkeit.....	7
3.3. Didaktische Schrittfolge für die Kombinatorik	8
4. KOMPETENZERWARTUNGEN – VERANSCHAULICHUNG ANHAND VON AUFGABENBEISPIELEN	9
4.1. Unterstufe der Primarschule	9
Bezüge zu den Kompetenzerwartungen	9
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der beschreibenden Statistik (4.1.1; 4.1.2; 4.1.3) ..	10
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit (4.1.4; 4.1.5).....	11
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich Kombinatorik (4.1.6).....	13
4.2. Mittelstufe der Primarschule	16
Bezüge zu den Kompetenzerwartungen	16
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der beschreibenden Statistik (4.2.1; 4.2.2; 4.2.3) ..	17
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich Wahrscheinlichkeit (4.2.4.)	19
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Kombinatorik (4.2.5; 4.1.6).....	21
4.3. Oberstufe der Primarschule	24
Bezüge zu den Kompetenzerwartungen	24
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der beschreibenden Statistik (4.3.1; 4.3.2; 4.3.3; 4.3.4).....	25
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit (4.3.4; 4.3.5).....	26
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Kombinatorik (4.3.6).....	29
4.4. Erste Stufe der Sekundarschule	31
Bezüge zu den Kompetenzerwartungen	31
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Statistik (4.4.1; 4.4.2; 4.4.3; 4.4.4; 4.4.5).....	32
Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit (4.4.6; 4.4.7).....	34
Aufgabenbeispiele aus dem Bereich der Kombinatorik (4.4.8)	37
4.5. Anhang	39
STICHWORTLISTE	46
LITERATUR	47

1. Bereiche der Stochastik

Die Stochastik umfasst drei Teilgebiete der Mathematik:

1. Die **Statistik**, insbesondere die beschreibende Statistik, stellt die qualitativen oder quantitativen Daten übersichtlich dar und ordnet sie. Diese Daten werden anhand numerischer Werte (z.B. Durchschnitt, häufigster Wert, Minimum, Maximum) beschrieben.

Zum Beispiel beim Erstellen und Deuten eines Klimadiagramms.

2. Die **Wahrscheinlichkeitstheorie** befasst sich mit der Beschreibung zufälliger Ereignisse und ihrer Modellierung.

Zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit im Lotto zu gewinnen.

3. Die **Kombinatorik** beschäftigt sich mit der Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder dem Auswählen von Objekten.

Zum Beispiel die Anzahl möglicher Kombinationen für ein Zahlenschloss.

2. Warum Stochastik in der Primarschule und in der ersten Stufe der Sekundarschule?

2.1. Beitrag zur Umwelterschließung

Kinder begegnen in ihrem Alltag ständig Daten. Die Kinder sollen fähig sein, die Flut von Daten zu verarbeiten und sie kritisch zu hinterfragen. Es geht also dabei vorwiegend um Daten, Darstellungen und ihre Interpretation (z.B. in Zeitungen).

Neben den Daten umfasst die Wirklichkeit viele vom Zufall bestimmte Phänomene: Würfelspiele, Lotterie, Prognosen ausgehend von statistischen Daten, Aspekte des Gewinnens,...

Die Kinder sollen an den Umgang mit dem Zufall herangeführt werden.

2.2. Förderung der inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen (Kernkompetenzen)

Der **Inhaltsbereich „Daten“** ist eng mit dem Erwerb inhaltlicher Kompetenzen verbunden.

„Realistische Zahl- und Größenvorstellungen sind ebenso Voraussetzung wie Ziel der Arbeit mit Daten.

Das Strukturieren und Verarbeiten von Daten ist nicht möglich, wenn nicht ebenso ein Blick für Muster entwickelt wird. Im Bereich der **prozessbezogenen Kompetenzen** (siehe Rahmenplan) denkt man vorrangig an das Strukturieren, wenn es um das Verarbeiten eigener Daten geht, und an das Argumentieren und Kommunizieren, wenn gegebene Daten interpretiert werden sollen.“¹

Das Modellieren kann durch Fragestellungen aus dem Alltag entwickelt werden.

¹ Ruwisch, S. (2009). Daten frühzeitig thematisieren. *Mathematik – Daten: Erheben und deuten*, 21, S. 4-5.

Die Aufgabenstellungen in Bereich der Stochastik sind auch geeignet um **innermathematische Verknüpfungen** zu realisieren (z.B. Größenvorstellungen, Zahlenvorstellungen, %-Rechnung, Operieren mit Brüchen, ...).

2.3. Interesse am Gegenstand (intrinsische Motivation)

Aufgabenstellungen im Bereich der Stochastik enthalten viele spannende Probleme, die nicht sofort lösbar sind. Dadurch machen sie neugierig und erhalten einen starken Aufforderungscharakter sie zu lösen. Die Kinder erhalten Gelegenheit zu experimentieren und zu spielen.

Dabei sollen sie kein theoretisches Wissen im Bereich Stochastik erwerben; das mathematische Wissen wird als **Werkzeug** eingesetzt, um konkrete Probleme zu lösen (instrumentale Funktion der Mathematik).

2.4. Frühzeitiger Erwerb stochastischer Begriffe

Um den Bereich Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit angemessen zu erfassen und zu beschreiben, ist eine eigene Art des Denkens nötig, die bereits in der 1. Stufe der Primarschule entwickelt werden kann. Die Kinder sollen die Begriffe der Stochastik in ihre Alltagserfahrungen, z.B. Spielsituationen mit dem Würfel, erkennen, deuten und reflektieren.

Die Kompetenzen werden im Sinne eines kontinuierlichen Lernprozesses aufgebaut und dienen als Erfahrungsgrundlage für den Mathematikunterricht der Sekundarschule.

3. Didaktische Schrittfolge und Überblick der inhaltlichen und prozessorientierten Kompetenzen in der Stochastik

Nachfolgende Tabellen sollen die Verbindungen zwischen den Kompetenzerwartungen der verschiedenen Bereiche der Stochastik und dem jeweiligen methodischen Vorgehen aufzeigen. Diese Vorgehensweisen orientieren sich sowohl an inhaltlichen als auch an prozessorientierten Kompetenzen. Die Mathematik (stochastische Begriffe und Verfahren) soll an für Kinder bedeutsamen Situationen erfahren und erarbeitet werden. Das mathematische Wissen wird somit als Werkzeug eingesetzt, um „Alltagsprobleme“ zu klären und zu verstehen.

Die ausgearbeiteten Beispiele orientieren sich jeweils an den methodischen Vorgehensweisen (didaktische Schrittfolge).

3.1. Didaktische Schrittfolge für die beschreibende Statistik

<p style="text-align: center;">Mathematische Inhalte und Kompetenzen</p>	<p style="text-align: center;">Progression und Bemerkungen</p>
<p>Sammeln und ermitteln Daten in/aus Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten</p>	<p><u>1. Ungeordnete Daten</u></p> <p>Die Kinder sollen Objekte, Situationen oder Experimente beobachten, aus denen qualitative sowie quantitative Eigenschaften gewonnen werden.</p> <p>Die qualitativen Daten entsprechen Merkmalen wie Farbe, Form, ...</p> <p>Die quantitativen Daten werden gewonnen aus Messungen und Zählungen.</p> <p>Es sollen ausreichend Daten aus Situationen entnommen werden, so dass es für K. Sinn macht, diese Daten zu strukturieren und zu ordnen.</p>
<p>Strukturieren Daten und stellen sie in Tabellen, Diagrammen und Schaubildern dar.</p> <p>Anmerkung: Datenformen nutzen, um</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ einen Überblick zu erhalten; ▪ die Daten zu vergleichen <p>Verstehen, dass die Aussagekraft von Daten abhängig sowohl von der Art der Datenerhebung als auch von der Art der Datenverarbeitung ist.</p>	<p><u>2. Geordnete oder klassifizierte Daten</u></p> <p>Daten werden klassifiziert, gezählt und/oder geordnet.</p> <p>Veranschaulichungen durch:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tabellen (Strichliste, Tabelle mit doppeltem Eingang) - Diagramme (Stab-, Streifen-, Balken-, Säulen- und Kreisdiagramm) - Baumdiagramm
<p>Interpretieren Daten und berechnen Kennwerte im Sinne von „zentralem Wert“, „Durchschnitt“, „häufigstem Wert“, „Minimalwert“ und „Maximalwert“,...</p>	<p><u>3. Interpretierte Daten</u></p> <p>Analyse der Tabellen und Diagramme</p>
<p>Urteilen auf Grund von statistischen und stochastischen Ergebnissen, fällen Entscheidungen und werten diese aus.</p>	<p><u>4. Eventuell Transfer auf neue Beispiele/erweiterte Aufgaben</u></p>

3.2. Didaktische Schrittfolge für die Wahrscheinlichkeit

<p style="text-align: center;">Mathematische Inhalte und Kompetenzen</p>	<p style="text-align: center;">Progression und Bemerkungen</p>
<p>Ordnen den Ereignissen die Begriffe „ist möglich, ist unmöglich, ist sicher“ zu</p> <p>Nutzen Darstellungen wie zum Beispiel Rechtecke, Tabellen mit doppeltem Eingang, Baumdiagramme</p>	<p><u>1. Erfahrungsmethoden</u></p> <p><u>A. Spielsituationen/ Sachsituationen beobachten:</u> Trifft ein Ereignis ein oder nicht? Zum Beispiel: Beim Würfelspiel: Kommt die 6 öfter vor als die 2? Beim Ziehen von verschiedenfarbigen Kugeln aus einer Urne: Welche Farbe wird häufiger gezogen?</p> <p><u>B. Beobachtungen dokumentieren</u> Die statistischen Methoden werden hier eingesetzt, um die Daten zu erheben, zu strukturieren. (Verbindung zur beschreibenden Statistik)</p> <p>Die Daten werden durch angepasste Darstellungen veranschaulicht. Zum Beispiel: Würfelspiel Die Kinder würfeln 20 Mal, 50 Mal, .. und halten die Würfelresultate in einer Tabelle fest.</p>
<p>.....und drücken Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Brüchen aus</p> <p>Finden in Vorgängen der eigenen Erfahrungswelt zufällige Ereignisse</p>	<p><u>2. Reflektierende Methoden</u></p> <p><u>A. Analyse/Schlussfolgerung</u> (in Anlehnung an die Experimente) Die Ergebnisse werden interpretiert. Zum Beispiel: Die 2 und die 6 werden quasi gleich oft gewürfelt. Beide Zahlen sind also gleichwahrscheinlich.</p> <p><u>B. Transfer auf neue Beispiele/erweiterte Aufgaben</u> Neue Situationen erfinden (= Transfer), Verbindungen zum Alltag schaffen Zum Beispiel: - Mit einem neuen Würfel spielen, auf dem manche Zahlen mehrmals vorkommen. Die Gewinnchancen der einzelnen Zahlen sind dann unterschiedlich. - Die Würfelsituation wird auf eine Urnsituation übertragen.</p>

3.3. Didaktische Schrittfolge für die Kombinatorik

Mathematische Inhalte und Kompetenzen	Progression und Bemerkungen
<p>Lösen einfache kombinatorische Aufgaben.</p> <p>Wählen Methoden zur Datenerfassung ...</p>	<p>1. <u>Spielsituation/Sachsituation:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Daten sammeln und miteinander vergleichen. Z.B. Die Kinder schreiben mögliche Codenummern für ein dreistelliges Zahlenschloss: 1-2-3; 6-5-1 ... - Erkennen, dass es mehrere Möglichkeiten gibt - Sich fragen, wie man alle möglichen Lösungen finden kann.
<p>... und zur Datendarstellung (Baumdiagramm, systematisches Zählen) aus.</p> <p>Wenden arithmetische Verfahren (Multiplikationen) an.</p>	<p>2. <u>Strategien entwickeln:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Suchen nach effizienten und kontrollierbaren Strategien/Verfahren, um alle Möglichkeiten zu finden. <p>Wenden die Methoden der Datendarstellung an.</p>
<p>Finden in Vorgängen der eigenen Erfahrungswelt kombinatorische Ereignisse.</p>	<p>3. <u>Transfer auf neue Beispiele / erweiterte Aufgabe</u></p> <p>Die Kinder bestimmen, wie viele Möglichkeiten es gibt, um Fahnen in drei Farben anzufärben.</p>

4. Kompetenzerwartungen – Veranschaulichung anhand von Aufgabenbeispielen

Vorbemerkung: Die Bezüge zu den Kompetenzerwartungen werden jeweils mit den *Inhaltskontexten* (*kursiv gekennzeichnet*) verknüpft.

4.1. Unterstufe der Primarschule

Bezüge zu den Kompetenzerwartungen

4.1.1 Erfassen Daten

4.1.2 Ordnen und sortieren Mengen von Dingen aus der Lebenswirklichkeit *und veranschaulichen die Daten mit Hilfe von Strichlisten und Tabellen*

4.1.3 Entnehmen aus Bildern und Tabellen Informationen und treffen dazu Aussagen im Sinne von absoluten Häufigkeiten

4.1.4 Finden in Vorgängen der eigenen Erfahrungswelt zufällige Ereignisse

4.1.5 Ordnen den Ereignissen die Begriffe „*ist möglich*“, „*ist unmöglich*“, „*ist sicher*“ zu

4.1.6 Lösen einfache kombinatorische Aufgaben (und benutzen angepasste Darstellungen)

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der beschreibenden Statistik (4.1.1; 4.1.2; 4.1.3)

*Ausgearbeitete
Aufgabe:
LIEBLINGSTIER*

Didaktische Schrittfolge

1. Ungeordnete Daten
gewonnen aus einer
Sachsituation
2. Geordnete oder
klassifizierte Daten
3. Interpretierte Daten
4. Erweiterte Aufgaben

Verlauf

Nach dem Besuch eines Bauernhofes zählen die Kinder die Tiere des Bauernhofes auf und bezeichnen ihr Lieblingstier. Die Kinder wählen aus vorbereiteten Zeichnungen/Fotos ihr Lieblingstier aus und heften das Bild an die Tafel.

Die so gewonnenen Daten (hier Lieblingstiere) werden nun geordnet und strukturiert. Mit Hilfe einer Strichliste und/oder einem Säulendiagramm werden die Ergebnisse der Kinder visualisiert.

Die Kinder vergleichen die Aussagekraft beider Darstellungen.

Statistische Fragen (häufigstes Tier, wenig beliebtes Tier,...) sowie arithmetische Fragen (wie viele Tiere einer Art, wie viel mehr/weniger....) werden formuliert und beantwortet.

Die Kinder machen eine Umfrage. Sie befragen die Kinder einer anderen Klasse, welche ihre Lieblingstiere sind. Sie sammeln die Daten mit Hilfe einer Strichliste und visualisieren danach die Ergebnisse in einer Tabelle. Abschließend werden die Ergebnisse der beiden Klassen verglichen.

Die **absolute Häufigkeit** im Bereich Statistik gibt die Anzahl des Auftretens eines Merkmals an. Zum Beispiel: die Anzahl Pferde.



- **Wettermerkmale** (sonnig, regnerisch, bedeckt) können anhand einer Tabelle veranschaulicht werden. Während eines Monats werden auf diese Weise Daten gesammelt und interpretiert.
- **Geburtstage der Kinder:** wie viele Kinder haben im Monat Januar Geburtstag, wie viele im Monat Februar,...
- **Unsere Familie:** Familienmitglieder (Geschlecht der Kinder, Anzahl Geschwister, ...)

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit (4.1.4; 4.1.5)



Didaktische Schrittfolge

1. Erfahrungsmethoden

Laplace-Experimente (Pierre Simon de Laplace (1749-1827))
So bezeichnet man Experimente, deren Versuchsausgänge (Ereignisse) gleichberechtigt (gleichwahrscheinlich, gleichmöglich) sind.

Zum Beispiel: Ziehung der Lottozahlen, Wurf einer Münze, Würfeln mit Spielwürfeln, Drehen eines Kreisels (eingeteilt in gleich große Flächen),...

Ablauf

A. Sachsituation

Konkrete Durchführung des Spiels „Entchenangeln“. Die Kinder angeln Entchen (gleiches Aussehen, die Unterseite ist mit/ohne Farbpunkte versehen). Ente mit Farbpunkt bedeutet Gewinn. Ente ohne Farbpunkt bedeutet Niete/Verlust.

5 Situationen schaffen, die konkret durchgespielt werden:

- o der Gewinn ist möglich, aber selten: 10 Enten, davon 2 Enten mit und 8 ohne Farbpunkte
- o der Gewinn ist möglich und häufig: 10 Enten, davon 8 Enten mit und 2 ohne Farbpunkte
- o der Gewinn/Verlust ist gleichwahrscheinlich: 10 Enten, davon 5 mit und 5 ohne Farbpunkte
- o der Gewinn ist sicher: 10 Enten, alle haben Farbpunkte
- o der Gewinn ist unmöglich: 10 Enten ohne Farbpunkte

B. Beobachtungen dokumentieren

Mögliche Gewinnchancen (mit 10 Entchen)		mit ●	ohne ●
unmöglich		0	10
möglich	selten	2	8
	gleichwahrscheinlich	5	5
	häufig	8	2
sicher		10	0

2. Reflektierende Methode

A. Analyse/ Schlussfolgerung

- Die Resultate werden nun verglichen, diskutiert und erklärt.
- Die Ergebnisse der **Reflexionsphase** werden in einer Tabelle festgehalten. Die fehlenden Situationen werden von den Kindern ergänzt (alle möglichen Zerlegungen der Gesamtzahl; hier 10).

Mögliche Gewinnchancen (mit 10 Entchen)		mit ●	ohne ●
unmöglich		0	10
möglich	selten	1	9
		2	8
		3	7
		4	6
	gleichwahrscheinlich	5	5
	häufig	6	4
		7	3
		8	2
	9	1	
sicher		10	0

Die Fälle „selten“ und „häufig“ und ihre Bedeutung sollen besprochen werden.

B. Erweiterte Aufgaben/Transfer

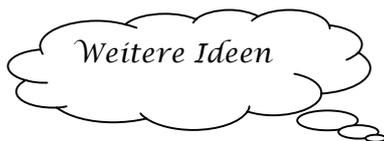
- 1) Neue Situation schaffen mit einer anderen Anzahl Entchen. Diese

Aktivität kann so mit der Zerlegung natürlicher Zahlen verknüpft werden.

2) Transfer

Die Erkenntnisse, die die Kinder durch das Entchenspiel gewonnen haben, übertragen sie auf eine neue Ausgangssituation. Die LP wählt zum Beispiel die Lose als neue Anwendungssituation. Die Frage – Wieso ziehen wir so viele Nieten? – soll beantwortet werden.

Der Schausteller möchte seinen Gewinn optimieren. Deshalb setzt er seine Lose so zusammen, dass er möglichst viele Nieten im Verhältnis zu wenigen Gewinnlosen anbietet. Zu gewinnen ist möglich, aber äußerst selten.



- Werfen eines Würfels
- Werfen einer Münze
- Ziehen einer Kugel aus einer Urne

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich Kombinatorik (4.1.6)

*Ausgearbeitete
Aufgabe:
PAPIERPUPPE*

1. Spielsituation

Eine Papierpuppe anziehen (konkrete Ebene)

Die Schüler erhalten eine Papierpuppe als Ausschneidevorlage sowie Kleidungsstücke. Sie haben die Auswahl zwischen 3 verschiedenfarbigen T-Shirts und 2 Hosen.

Suchfrage: Wie möchtest du deine Puppe anziehen?

2. Strategien entwickeln

1) Die Kinder suchen in Kleingruppen (Partnerarbeit) nach konkreten Anziehungsmöglichkeiten für die Puppe und halten diese auf einer Kopiervorlage fest.

Während der Auswertungsphase werden die Ergebnisse der K. verglichen und nach dem Aussehen sortiert.

2) Auswertungsfrage: Haben wir alle Möglichkeiten gefunden? Kannst du deine Puppe jeden Tag der Woche anders anziehen? Begründe!

Fazit: Mit 3 T-Shirts und 2 Hosen erhalten wir 6

Kombinationsmöglichkeiten. Wir können folglich die Puppe nicht jeden Tag der Woche neu einkleiden.

3. Erweiterte Aufgabe

Neue Frage: Was brauchst du zusätzlich, um die Puppe jeden Tag neu anzuziehen? Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es dann (neues Problem)?

Die Kinder erhalten als Vorlage ein Arbeitsblatt mit vorgezeichneten T-Shirts und Hosen (mehr als Kombinationsmöglichkeiten).

Sie entscheiden, was sie zusätzlich (entweder T-Shirts oder Hose) benötigen, um mindestens 7 Kombinationsmöglichkeiten zu finden und färben diese Möglichkeiten entsprechend an.

Die Schülerdokumente werden dann in Hinblick auf eine Systematik ausgewertet (ungeordnetes Anfärben, systematisches Anfärben, Tabelle mit doppeltem Eingang).



1) Die Anzahl Kombinationsmöglichkeiten soll an den Zahlenraum angepasst werden.

2) Dieses Beispiel eignet sich, um die Kombinatorik mit der Statistik zu verknüpfen. Die Ergebnisse der K. werden z.B. nach gemeinsamen Merkmalen sortiert. (Erfassen Daten, sortieren sie und veranschaulichen anhand von angepassten Darstellungen)

3) Beobachtungshilfen

- Wer findet viele verschiedene Möglichkeiten? Wer findet alle?
- Wer geht beim Färben bereits systematisch vor?
- Wer findet Sortierungskriterien für die fertigen Zeichnungen?
- Wer kann begründen, alle Anfärbmöglichkeiten gefunden zu haben?

4) Diese kombinatorische Aufgabe illustriert einen multiplikativen Zusammenhang. Die gesamte Anzahl Möglichkeiten ergibt sich aus der Multiplikation der Anzahl Kleidungsstücke (3 T-Shirts, 2 Hosen); also 3×2 Möglichkeiten (kartesisches Produkt).

Weitere Ideen

- **Blumen** (fachübergreifend)

Aktivität 1: Die Kinder erfahren in Naturwissenschaften, wie eine Blume aufgebaut ist: Blüte mit Kronblättern, Stängel, Blätter und Wurzeln.

Aktivität 2: Die K. basteln/zeichnen Blumen, die sich durch verschiedene Kriterien unterscheiden (Farbe der Blüte, Anzahl Kronblätter, Anzahl und Form der Blätter). Es wird eine Auswahl innerhalb der Kriterien getroffen.

Aktivität 3: Die K. suchen verschiedene Kombinationsmöglichkeiten für Blumen, vergleichen ihre Ergebnisse und halten sie in einem Baumdiagramm fest.

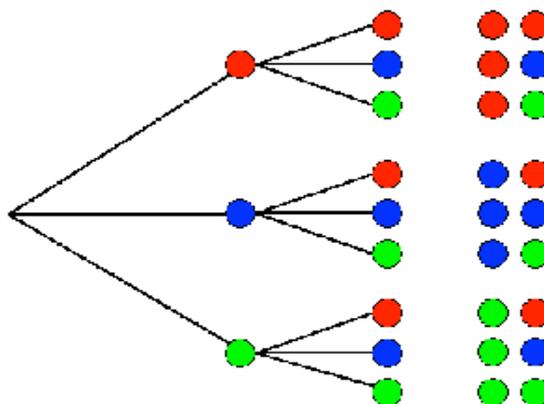
- **Eiskugeln**

Welche Möglichkeiten habe ich, eine Eistüte mit zwei Kugeln zu bestellen, wenn ich die Auswahl aus 3 Eissorten habe?

Baumdiagramm

Es ist eine graphische Darstellung, die zum Beispiel die chronologische Reihenfolge von Elementen eines Experiments oder einer Aktivität sowie die Ergebnisse eines bestimmten Ablaufs zeigt.

Z.B. hier die möglichen Kombinationen beim Ziehen von 2 Kugeln aus einer Menge von 3 Kugeln.



4.2. Mittelstufe der Primarschule

 Bemerkung

Die Bezüge zu den Kompetenzerwartungen der 1. Stufe gelten auch für die 2. Stufe, d.h. es dürfen Lernaktivitäten und Spiele aus diesen Bereichen behandelt werden.

Bezüge zu den Kompetenzerwartungen

- 4.2.1 Sammeln Daten aus der Lebenswirklichkeit und den Medien, bereiten sie auf und stellen sie dar
- 4.2.2 Wählen Methoden der Datenerfassung aus
- 4.2.3 Erstellen, vergleichen und interpretieren Tabellen (*Strichliste, Tabelle mit doppeltem Eingang*) und verschiedenartige Diagramme (*Stabdiagramm, Streifendiagramm*) und treffen Aussagen im Sinne von „*absoluter Häufigkeit*“ und „*häufigster Wert*“
- 4.2.4 Planen einfache Zufallsexperimente, führen sie durch und dokumentieren den Verlauf
- 4.2.5 (Siehe 4.1.6.) *Lösen einfache kombinatorische Aufgaben*

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der beschreibenden Statistik (4.2.1; 4.2.2; 4.2.3)

Ausgearbeitete Aufgabe:
GEBURTSTAGE DER SCHÜLER EINER KLASSE

📖 Wenn wir die **Daten** bei den Personen (hier: Schüler) erheben, dann sind die Schüler die **Merkmalsträger**, die Geburtstagsmonate der Schüler die **Merkmale** und die **Merkmalsausprägungen** die möglichen Ergebnisse (12 Monate).

Didaktische Schrittfolge

1. Ungeordnete Daten gewonnen aus einer Sachsituation

Verlauf

In einer Klasse von 15 Schülern notiert jedes K. seinen Namen sowie sein Geburtsdatum auf einen Zettel. Diese Zettel werden an der Tafel gesammelt.

Inci	12. Januar
Sebastian	8. Februar
Anna	5. Juli
Paul	13. Dezember
Yves	30. Dezember
Isabelle	7. April
Marie	24. September
Florance	13. Januar
Gregory	20. Mai
Florian	24. Juni

2. Geordnete oder klassifizierte Daten

Da sich aus unsortierten Daten keine Beziehungen ablesen lassen, überlegen die Sch., wie sie ihre Daten sortieren oder ordnen können. Z.B.: chronologisch, pro Monat gruppiert, pro Jahreszeit gruppiert, ...

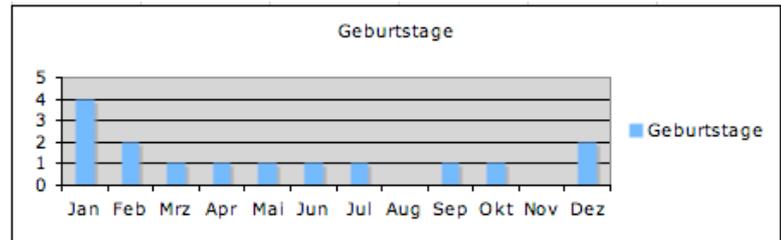
Die Vor- und Nachteile der Sortierungen/Ordnungen werden diskutiert und gemeinsam wird ein Kriterium festgelegt. Mögliches Kriterium: Nach Monaten sortieren und ordnen (Strichliste)

Anzahl der
Geburtstage

a) Erste Darstellungsform: Strichliste

Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	Oktober	November	Dezember
IIII	II	I	I	I	I	I	O	I	I	O	II

b) Zweite Darstellungsform: Ein Säulendiagramm



Jedes K. klebt ein kleines Quadrat zu seinem Geburtsmonat. So entsteht automatisch ein Säulendiagramm.

3. Interpretierte Daten

Die „absoluten Häufigkeiten“ lesen wir in den jeweiligen Darstellungsformen ab.

Häufigster Wert:

- Im August und November sind keine Kinder geboren.
- In den meisten Monaten ist jeweils nur 1 Kind geboren.
- Im Januar sind die meisten Kinder geboren.
-

Die absolute Häufigkeit entspricht der Anzahl Merkmalsträger mit der gleichen Merkmalsausprägung.

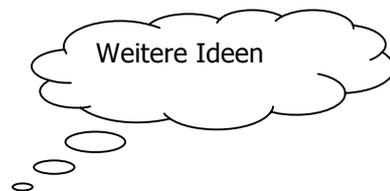
Das **Säulendiagramm/Stabdiagramm** stellt die Daten so dar, dass die Merkmalsausprägungen auf der X-Achse und die Häufigkeiten auf der Y-Achse sind.

Das **Balkendiagramm** entsteht durch die Umkehrung der X- und Y-Achse im Säulendiagramm.

Das **Streifendiagramm** wird häufig verwendet, um die Verteilung der Einzelwerte im Verhältnis zum Gesamtwert darzustellen, also als relative Verteilung in Prozenten.

4. Transfer/Erweiterung
der Aufgaben

Erweiterung der Aufgabe/Mögliche Variation der Aufgabe: Die Kinder sollen ein neues Kriterium entwickeln und die Daten danach neu sortieren und ordnen. Zum Beispiel: Sortieren und Ordnen nach den Jahreszeiten.



- **Vorschlag aus der Literatur:** Leben große Menschen immer auch auf großem Fuß?
Aus: Hoffmann Antje, Grundschule Mathematik Nr. 2. Quartal 2009, S. 23 – 27, Kallmeyer (Seelze)
- **Umfragen:** z.B. Klassensprecher, Klassenausflug, Verkehr (Wer kommt mit dem Auto zur Schule?; Wer kommt mit dem Fahrrad? Wer kommt zu Fuß? - Dieser Themenbereich lässt sich gut mit dem Umweltschutz verbinden.)

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich Wahrscheinlichkeit (4.2.4.)



Didaktische Schrittfolge

1. Erfahrungsmethoden

Verlauf

A. Spielsituation

Die Kinder spielen während ein paar Minuten „Mensch ärgere dich nicht“. Es gibt Kinder, die weiter im Spiel gekommen sind als die anderen, weil sie Glück hatten schneller eine 6 zu würfeln.

Diese Situation kann zum Problematisieren genutzt werden: Gibt es Glückswürfel oder sind die Ergebnisse zufällig?

Um diese Frage zu beantworten, beschäftigen sich die Kinder nun näher mit dem Würfel.

Das K. formuliert Vermutungen, ob es eine Glückszahl gibt oder nicht.

2. Reflektierende Methoden



Zufallsexperiment

Die Modelle werden mit dem Ziel erstellt, gewisse Prognosen über den Ausgang dieser Experimente zu ermöglichen, also über das Eintreten bestimmter Ereignisse und die relative Häufigkeit ihres Eintretens Vorhersagen zu treffen.

Bedingungen für ein Zufallsexperiment

- 1. Das Experiment ist beliebig oft unter den gleichen Bedingungen durchführbar.
- 2. Die möglichen Ergebnisse können eindeutig beschrieben werden. (Beim Würfeln: 1 bis 6)
- 3. Es ist nicht vorhersagbar, welches Ergebnis des Experiments eintritt.

B. Beobachtungen dokumentieren

Experiment: in PA würfelt ein K. 40 x; das andere K. notiert die Resultate in einer Strichliste (den Verlauf dokumentieren).

A. Analyse / Schlussfolgerung

Synthese in GG: Vergleich der Ergebnisse und Analyse der Resultate.

- Was wird am häufigsten gewürfelt?
- Welche Aussagen können wir machen? Was können wir schlussfolgern?

Schlussfolgerung: Je mehr wir würfeln, desto deutlicher kann festgehalten werden, dass alle Zahlen gleichwahrscheinlich fallen.

Die Analyse wird erweitert, so dass wir Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen im Sinne von „möglich – unmöglich – sicher“.

Das Spiel dient auch hier als Referenz.

Z.B. Das Kind überprüft/widerlegt nachfolgende Aussagen:

- Die 6 wird mit Sicherheit geworfen.
- Die 1 wird am häufigsten geworfen.
- Die Chance eine 6 oder eine 1 zu würfeln ist gleich.
- Die geraden Zahlen werden häufiger geworfen als die ungeraden.
- Die Zahl 7 wird nie geworfen.

B1. Erweiterte Aufgabe

Vertiefende Übung: Kann der Würfel benutzt werden, um eine „faire“ Aussage zu treffen?

Sind nachfolgende Aussagen fair oder unfair. Ändere die Aussage, so dass sie „fair“ wird!

Wir würfeln mit einem normalen Würfel. Bei einer 6 spielen wir Basketball; bei den anderen Zahl spielen wir Volleyball.

B2. Transfer auf ein neues Beispiel

Andere Kontexte und Situationen suchen: Die K. sollen andere Materialien auswählen, mit deren Hilfe sie faire Aussagen treffen.

Z.B. Münze werfen,...



- Karten ziehen, Lose ziehen, Kreisel drehen

Elementarereignis: ein konkretes Ergebnis eines Zufallsexperiments. Z.B.: 4 beim Würfeln

Ereignis: Menge von Elementarereignissen. Z.B. Eine ungerade Zahl würfeln (1, 3, 5).

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Kombinatorik (4.2.5; 4.1.6)



Didaktische Schrittfolge

1. Sachsituation

Verlauf

In Naturwissenschaften

Die Kinder beobachten Vögel (im Garten, Käfig, Film,...) und suchen Unterscheidungsmerkmale.

Suchfrage: Wie können wir die einheimischen Vögel voneinander unterscheiden? Welches sind typische Merkmale?

Mögliche Merkmale sind Größe, Farbe des Federkleids, Form des Schnabels, Form der Füße.

Zusammenhang zwischen Form und Funktion der Schnäbel:

„Jeder Vogel verhält sich so, wie ihm sein Schnabel gewachsen ist.“

Was bedeutet diese Aussage?

Die Vögel werden nach der Form der Schnäbel klassifiziert. Die Form des Schnabels wird mit der Nahrungsaufnahme der Tiere in Verbindung gesetzt. Dabei kann man bei den Vögeln verschiedene Ernährungstypen unterscheiden (siehe Anhang 1).

Diese Vorgehensweise kann auf die Vogelfüße übertragen werden.

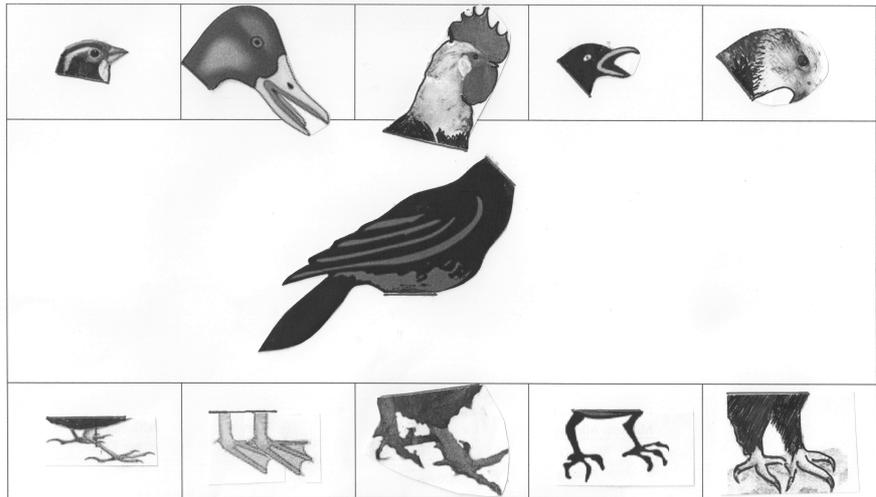
Die Form der Vogelfüße ist an den jeweiligen Lebensraum angepasst (siehe Anhang 1).

1. Spielsituation

In Mathematik - Kombinatorik

Die Schüler sollen Fantasietiere aus Teilbildern (Kopf – Rumpf – Füße) zusammenstellen (siehe Kombinationsmöglichkeiten im Anhang 2).

Die Kinder entdecken individuell oder in Partnerarbeit einige Kombinationsmöglichkeiten.



Beispiele zweier Fantasienvögel:



In der Großgruppe werden die Ergebnisse gesammelt und verglichen. Die LP fragt, ob es weitere Kombinationen gibt. Wie viele gibt es insgesamt?

2. Strategien entwickeln

Die Kinder suchen nach allen Kombinationsmöglichkeiten. Sie probieren frei aus oder systematisch.

Zum Beispiel wird der erste Kopf mit den unterschiedlichen Füßen kombiniert, dann der zweite Kopf mit allen möglichen Füßen usw. Die Kombinationen können zum Beispiel mithilfe einer Tabelle mit doppeltem Eingang veranschaulicht werden.

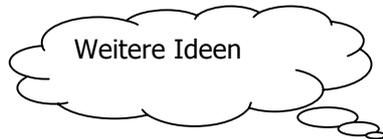
Die Anzahl möglicher Kombinationen: Anzahl Köpfe x Anzahl Füße.

Im Anschluss daran können die Kinder den Fantasietieren einen Tiernamen geben.

3. Erweiterte Aufgaben

Was passiert mit der Anzahl Kombinationsmöglichkeiten,

- wenn wir die Anzahl Köpfe, Anzahl Füße verändern?
- wenn wir die Anzahl Köpfe, die Anzahl Füße und auch die Anzahl Schwanzarten unterscheiden?
-



- Menükarten erstellen aus verschiedenen Vorspeisen, Hauptspeisen und Desserts
- Wie viele verschiedene Schmetterlinge gibt es für die Färbung? (siehe Anhang 3)

4.3. Oberstufe der Primarschule

Bezüge zu den Kompetenzerwartungen



Bemerkung: Die Bezüge zu den Kompetenzerwartungen sind teilweise neu formuliert worden, um eine Kohärenz des Fachwissens zu gewährleisten.

- 4.3.1 Wählen Methoden zur Datenerfassung und Formen der Datendarstellung aus, verwenden sie und reflektieren sie kritisch
- 4.3.2 Bereiten Daten auf, stellen sie dar, interpretieren sie sachgerecht
- 4.3.3 Bestimmen den Zentralwert (Median), den häufigsten Wert und den Durchschnittswert (Mittelwert)
- 4.3.4 Ermitteln (absolute und relative) Häufigkeiten im Bereich der Statistik sowie der Wahrscheinlichkeit (Zufallsversuche); veranschaulichen die Ergebnisse mithilfe von Tabellen und Diagrammen (Stabdiagramm, Streifendiagramm, Baumdiagramm, Kreisdiagramm)
- 4.3.5 Schätzen die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen
- 4.3.6 (Siehe 4.1.6.) Lösen einfache kombinatorische Aufgaben

Arithmetischer Mittelwert (Durchschnitt)

Er ist der Quotient der Summe aller Einzelwerte und der Anzahl Einzelwerte einer quantitativen Merkmalsausprägung.

*Beispiel mit den Werten:
4, 4, 5, 5, 8, 10*

$$(4 + 4 + 5 + 5 + 8 + 10) : 6 = 6$$

Median (Zentralwert)

Er ist der Wert in der Mitte einer geordneten Reihe von Werten einer quantitativen Merkmalsausprägung.

*Beispiel mit einer ungeraden Anzahl Werte 4, 4, 5, 8, 10:
Median = 5*

*Beispiel mit einer ungeraden Anzahl Werte
4, 4, 5, 8, 10, 20
Median: $(5 + 8) : 2 = 6,5$*

Modalwert (häufigster Wert)

Er ist der Wert, der am häufigsten in der Menge der Werte einer qualitativen oder quantitativen Merkmalsausprägung vorkommt.

*Beispiel mit den Werten
4, 4, 5, 5, 8, 10, 10, 10:
Modalwert = 10*

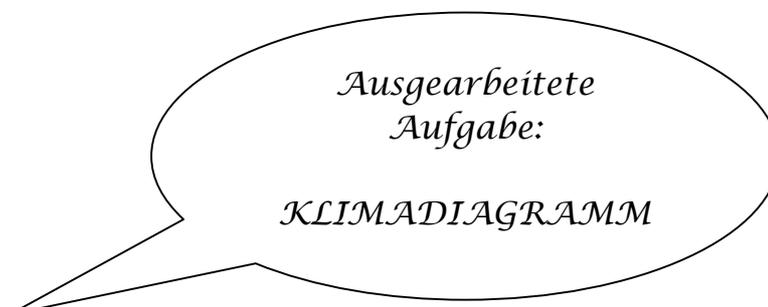
*Beispiel mit den Werten blau, rot, rot, rot, gelb, gelb gelb, weiß, weiß.
Modalwerte: rot und gelb*

Kreisdiagramm

Kreisdiagramme werden häufig verwendet, um zu verdeutlichen, welchen Anteil ein Wert am Ganzen hat.

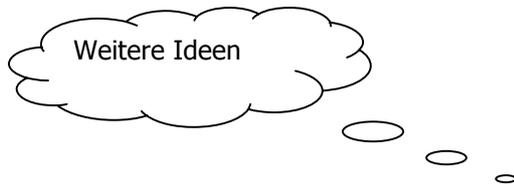
Normalerweise werden die Einzelwerte als Prozentwerte in einem Kreis dargestellt, also als relative Verteilung vom Ganzen.

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der beschreibenden Statistik (4.3.1; 4.3.2; 4.3.3; 4.3.4)



Didaktische Schrittfolge	Verlauf
<p><u>1. Ungeordnete Daten gewonnen aus einer Sachsituation</u></p>	<p>In Verbindung mit dem Geographieunterricht sollen die Kinder auf nachfolgende Fragestellung reagieren: Ist der Monat Mai in diesem Jahr viel „schöner“ als der Monat Mai im vorigen Jahr? In der Großgruppe wird die Subjektivität des Begriffes „schönes Wetter“ besprochen. Gutes Wetter für den Touristen bedeutet nicht dasselbe wie für den Landwirt. Welche Kriterien sind relevant, um Wetter zu kennzeichnen? Niederschlag, Temperatur, Wind, Sonnenstunden, Die Vorgehensweise, um Daten zu sammeln, wird mit den Kindern besprochen. Die Daten werden durch konkrete Messungen gesammelt oder im Internet, Zeitungen, ... gefunden.</p>
<p><u>2. Geordnete Daten</u></p>	<p>Die Kinder überlegen, wie diese Daten geordnet werden können, zum Beispiel chronologisch (nach Monaten). Ein Beispiel eines Klimadiagramms (siehe Materialien für den Geographieunterricht: Aufbau eines Klimadiagramms²) wird gezeigt und erläutert.</p>
<p><u>3. Interpretierte Daten</u></p>	<p>Die einzelnen Elemente des Diagramms werden gedeutet: durchschnittliche Jahrestemperatur, Jahressumme der Niederschläge, trockenster Monat, ...</p>
<p><u>4. Transfer</u></p>	<p>Neue Diagramme mit lokalen Daten werden erstellt.</p>

² Helf, R., Klein, G. & Vierbuchen. (2002) Materialien für den Geographieunterricht. Berlin: Cornelsen.

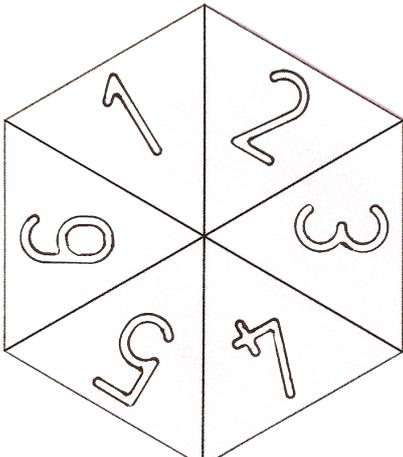


- Beispiele aus dem Medienalltag: Wahlergebnisse, statistische Daten/Diagramme in der Zeitung,...
- Daten zur Bevölkerung der jeweiligen Gemeinde (z.B. Geburten eines Jahres, Anzahl Frauen/Männer in der Gemeinde, Anzahl Kinder in der Schule,...)

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit (4.3.4; 4.3.5)



Material: Verschiedene Kreisel (regelmäßige n-Ecke), die in Sektoren eingeteilt werden. Diese Sektoren können farbig ausgemalt oder mit einer Ziffer gekennzeichnet werden.

Didaktische Schrittfolge	Verlauf
1. Erfahrungsmethoden	<p>A. Spielsituation</p> <p>Spiel mit einem sechseckigen Kreisel</p> <p>Kommt ein Sektor öfter als ein anderer vor?</p> 

2. Reflektierende Methoden

Relative Häufigkeit entspricht dem Quotienten der absoluten Häufigkeit und der Gesamtanzahl Daten.

Sie ermöglicht den Vergleich von Ergebnissen und wird oftmals in Form von Prozenten ausgedrückt.

Die **Gewinnchancen** werden in einem Verhältnis ausgedrückt. Diese Situation kann genutzt werden, um eine Verbindung zu den Brüchen oder zu den Prozenten zu schaffen.

Mögliche Deutungen von $2/6$:

- $2/6$ bedeutet „2 von 6 Möglichkeiten“
- $2/6$ kann ikonisch dargestellt werden und gedeutet werden als 2 Sechstel der Fläche des Kreisels.

B. Beobachtungen dokumentieren

Wie oft bleibt der Kreisel auf den Sektoren 1, 2, 3, 4, 5 und 6 liegen, wenn man ihn 20 x wirbelt? In Partnerarbeit halten die K. die Ergebnisse mit Hilfe einer Strichliste fest. Anschließend werden die Resultate in einem Säulendiagramm veranschaulicht.

A. Analyse und Schlussfolgerung

Im Plenum werden die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen miteinander verglichen.

Fazit: Mit den Resultaten der einzelnen Gruppen kann man noch keine klare Aussage in Bezug auf „keine Zahl wird mehr geworfen als die andere“ treffen.

Aus diesem Grund werden die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen zusammengelegt und anhand einer Tabelle und einem Säulendiagramm dargestellt. Die absoluten und relativen Häufigkeiten werden bestimmt.

Fazit: Die relativen Häufigkeiten werden in Form von Brüchen ausgedrückt. Sie zeigen, dass alle Zahlen gleich wahrscheinlich sind.

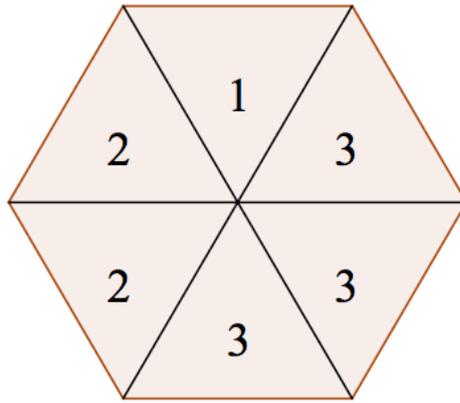
Die Wahrscheinlichkeit z.B. eine 4 zu erhalten, wird in Form $1/6$ („eins zu sechs“) ausgedrückt, wobei die 6 der Anzahl der Sektoren entspricht.

B. Transfer auf neue Beispiele

1) Variation des sechseckigen Kreisels – die Ziffern werden unregelmäßig auf die Sektoren verteilt (z.B. 1, 2, 2, 3, 3, 3).

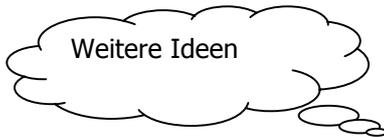
Die Sch. äußern Vermutungen, ob der Kreisel ein „fairer“ Kreisel ist. Sie untersuchen in Kleingruppen, welche Zahl bei 100 Umdrehungen am häufigsten liegen bleibt (Strichliste oder Tabelle, relative Häufigkeit). Die Sch. begründen ihre Ergebnisse.

Fazit: Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Verteilung der Ziffern auf dem Kreisel und den erhaltenen Häufigkeiten. Dieser Zusammenhang soll von den Sch. beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit eine 2 zu erhalten, beträgt $2/6$ („zwei zu 6“).



2) Die Sch. erfinden neue Verteilungssituationen der Ziffern auf dem Kreisel, z.B. 2, 2, 3, 3, 4, 4. Sie vermuten und begründen die Häufigkeit der geworfenen Ergebnisse ohne den Kreisel konkret zu drehen.

3) Variation des Kreisels – Die Anzahl Sektoren wird geändert. Die K. spielen mit einem achteckigen Kreisel und formulieren ähnliche Aufgaben.



- Spiele mit zwei Würfeln, mit zwei Kreiseln,...

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Hat ein Versuch m (mögliche) gleichwahrscheinliche Elementarereignisse (sie haben alle die gleiche Chance einzutreten wie z.B. beim Würfeln) und sind davon g (günstige) Fälle Realisierungen des Ereignisses, so ist die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{g}{m}$$

Z.B. Die Wahrscheinlichkeit eine gerade Zahl zu würfeln ist gleich $3/6$.

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Kombinatorik (4.3.6)

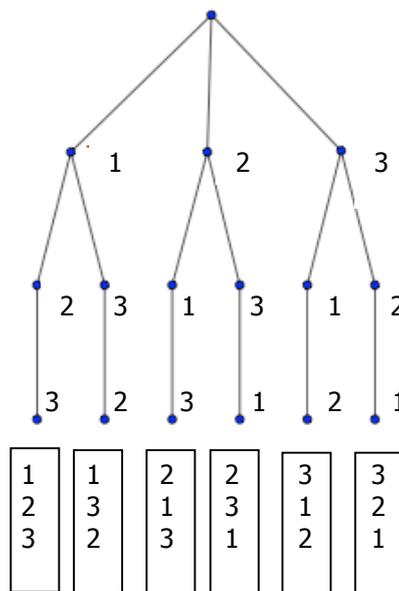


Didaktische Schrittfolge	Verlauf
<p>1. <u>Sachsituation</u></p>	<p>Zahlschloss für ein Fahrrad. Ist das Zahlschloss sicher? Kann der Zahlencode schnell geknackt werden? Das „vereinfachte“ Zahlschloss besteht z.B. aus drei Stellen und kann jeweils mit den Ziffern von 1 bis 3 besetzt werden. Die Sch. sollen die Anzahl Kombinationsmöglichkeiten schätzen.</p>
<p>2. <u>Strategien entwickeln</u></p>	<p>Die K. arbeiten in Kleingruppen und sollen ihre Denkergebnisse veranschaulichen und strukturieren. Eine geeignete Darstellung wäre das Baumdiagramm. Die Ergebnisse der Sch. werden in der Großgruppe vorgestellt und miteinander verglichen. Vor- und Nachteile der einzelnen Darstellungen werden diskutiert.</p>

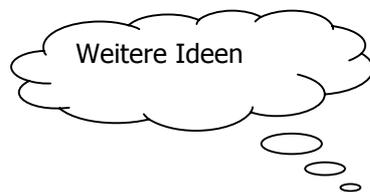
Permutation als kombinatorische Aufgabe

Die Anzahl Permutationen von n Elementen ist immer durch $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$ bestimmt.

Die Reihenfolge der Elemente spielt hier eine wesentliche Rolle.



	<p><u>Fazit:</u> Es gibt nur 6 mögliche Kombinationen: 3 (Möglichkeiten für die 1. Stelle) x 2 (Möglichkeiten für die 2. Stelle) x 1 (Möglichkeit für die 3. Stelle).</p> <p>Der Code könnte schnell geknackt werden.</p>
<p><u>3. Erweiterte Aufgabe</u></p>	<p>Echtes Zahlenschloss mit 3 Stellen und jeweils 10 Ziffern von 0 bis 9. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten gibt es? Schätze und bestimme. Schätze auch, wie viel Zeit du brauchst, um alle Kombinationsmöglichkeiten auszuprobieren.</p>



- Speisekarte erstellen: Auswahl aus verschiedenen Vorspeisen, Hauptgerichten und Desserts.
- Anzahl 5-stelliger Zahlen, die gebildet werden können mit vorgegebenen Ziffernkarten. Jede Karte kommt einmal oder mehrmals vor.

4.4. Erste Stufe der Sekundarschule

Bezüge zu den Kompetenzerwartungen



Bemerkung

Eine Kohärenz des Fachwissens im Sinne einer Kontinuität und Konsolidierung sollte gewährleistet sein: Der Rahmenplan der Sek I sieht nur Kompetenzerwartungen in dem Bereich der Statistik (4.4.1 bis 4.4.5) vor; er sollte sinnvollerweise durch die Bereiche Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik (4.4.6 bis 4.4.8) ergänzt werden. Zudem sollte der Bereich der Wahrscheinlichkeit mit der Statistik sowie mit der Kombinatorik verknüpft werden.

Der Bereich Wahrscheinlichkeit bietet eine mögliche Vertiefung in dem Bereich der Zahlen (Dezimalzahlen, Brüche, Prozentzahlen).

4.4.1 Erheben, ordnen und analysieren statistische Daten

4.4.2 Bestimmen und interpretieren einfache Kennwerte: *Gesamtzahl, Mittelwert, absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit, häufigster Wert (Modalwert), Maximum, Minimum, Zentralwert (Median)*

4.4.3 Stellen statistische Daten mittels Grafiken wie *das kartesische Diagramm, das Stabdiagramm, das Kreisdiagramm* dar

4.4.4 Interpretieren Daten und Grafiken und werten sie aus

4.4.5 Erkennen Grenzen der Interpretationsfähigkeit von Daten

4.4.6 Ermitteln (absolute und relative) Häufigkeiten im Bereich der Wahrscheinlichkeit; veranschaulichen die Ergebnisse mithilfe von Tabellen und Diagrammen

4.4.7 Schätzen und berechnen die Wahrscheinlichkeit von einfachen Ereignissen

4.4.8 Lösen einfache kombinatorische Aufgaben und nutzen Strategien wie zum Beispiel das systematische Zählen und veranschaulichen die Ergebnisse mithilfe von Tabellen und Diagrammen.

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Statistik (4.4.1; 4.4.2; 4.4.3; 4.4.4; 4.4.5)

Ausgearbeitete Aufgabe:
KOMMUNIKATIONS-
MITTEL

Didaktische Schrittfolge	Verlauf
<u>1. Ungeordnete Daten gewonnen aus einer Sachsituation</u>	<p>Von einer Studie zum Medienkonsum der Jugendlichen oder von einem Zeitungsartikel ausgehen.</p> <p>Übertragbarkeit auf die Klasse. Welche Fragen können wir uns zu diesem Themenbereich stellen? Was interessiert uns?</p> <p>Mögliche Fragen sind: Welche Kommunikationsmittel benutzen die Jugendlichen? Wie oft, wie lange benutzt du das jeweilige Kommunikationsmittel pro Tag? Die LP achtet darauf, dass die Sch. mehrere Fragen beantworten.</p> <p>Jeder Sch. hält seine Antworten (Daten) fest.</p>
<u>2. Geordnete Daten</u>	<p>1) In Kleingruppen überlegen die Schüler, wie sie alle Informationen (der Kleingruppe) zusammenfassen und strukturiert darstellen können. Die Daten zu den Fragen sollten ersichtlich sein.</p> <p>Die Ergebnisse der Kleingruppen werden vorgestellt, verglichen und diskutiert im Hinblick auf Übersicht und Vollständigkeit der Informationen. Geeignete und ungeeignete Darstellungsformen werden thematisiert.</p> <p>2) Anschließend soll sich die Klasse auf geeignete Darstellungsformen für die gesamte Klasse (z.B. 24 Personen) einigen.</p> <p>Fazit: Graphisch können nur 2 Variablen miteinander in Verbindung gestellt werden. Zum Beispiel: Kommunikationsmittel und Anzahl Personen oder Kommunikationsmittel und Zeit.</p>
<u>3. Interpretierte Daten</u>	<p>Die Sch. suchen Vor- und Nachteile der jeweiligen</p>

4. Transfer

Darstellungsformen (Tabelle, Streifendiagramm, Kreisdiagramm, kartesisches Diagramm) im Hinblick auf die Beantwortung der Ausgangsfragen. Bezüge zum Kapitel der Zuordnungen, wo Diagramme funktionale Zusammenhänge illustrieren, sollten genutzt werden.

Besondere Kennwerte (Gesamtzahl, Mittelwert, absolute Häufigkeit, relative Häufigkeit, häufigster Wert (Modalwert), Maximum, Minimum, Zentralwert (Median) werden in Bezug zu den einzelnen Diagrammen/Darstellungen kenntlich gemacht und ihre jeweilige Aussagekraft diskutiert.

Die Sch. übertragen ihre Erkenntnisse auf neue

Problemsituationen wie Freizeitplanung (Zum Beispiel: Wie viel Freizeit am Samstag, Sonntag, Schultagen? Welche Art von Aktivitäten?), Wahl des Klassensprechers, Einteilung des Taschengeldes, ...



- Denkanstöße:

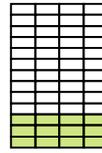
Interpretierbarkeit und Manipulierbarkeit von Daten sowie deren Darstellungen, zum Beispiel in der Zeitung statistische Informationen herausnehmen, interpretieren und vorhandene (und nicht vorhandene) Informationen kritisch hinterfragen.

Aufgabenbeispiele zu den Kompetenzen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit (4.4.6; 4.4.7)



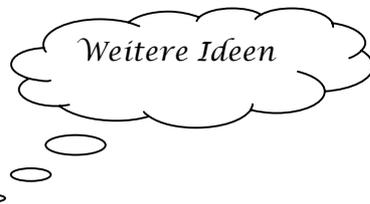
Didaktische Schrittfolge	Verlauf
1. Erfahrungsmethoden	<p><u>Sachsituation</u> (vorstellende Handlung)</p> <p>Bemerkung: Die Sch. sollten evt. nochmals konkrete Erfahrungen (Versuche konkret durchführen und Ergebnisse festhalten) mit Aufgaben aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit machen (siehe Aufgaben Stufe 3 Primarschule).</p> <p>Die Voraussetzung ist somit geschaffen, um sich in der nachfolgenden Aufgabenstellung eventuell mit einer vorstellenden Handlung zu beschäftigen.</p> <p>Ein vollständiger Kartensatz zählt 52 Karten. Die Sch. sollen abschätzen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, eine vorgegebene (eine rote Karte, ein Bild, eine bestimmte Karte,...) Karte (einmalig) zu ziehen.</p> <p>Die Sch. sollen eine angepasste Darstellung (z.B. Tabelle mit doppeltem Eingang) suchen, mithilfe der sie ihr Schätzergebnis überprüfen und den Mitschülern präsentieren.</p>
2. Reflektierende Methoden	<p><u>A. Analyse/Schlussfolgerung</u></p> <p>Die Ergebnisse der Sch. werden vorgestellt und verglichen, Vor- und Nachteile der Darstellungen diskutiert.</p> <p>Eine angepasste Darstellung ist die Tabelle mit doppeltem Eingang, da sie den vollständigen Ereignisraum</p>

- eine Figur (Bube, Dame oder König): $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$



B. Erweiterte Aufgabe/Transfer

- Die Sch. erfinden neue Aufgabenstellungen (nur mit einmaligem Ziehen).



- Lotterie
- Werfen einer Münze
- Ziehen von bunten Bonbons aus einer Dose (einmaliges, zweimaliges Ziehen)

Aufgabenbeispiele aus dem Bereich der Kombinatorik (4.4.8)



Didaktische Schrittfolge

Verlauf

(Idee aus: mathbu.ch, Klett und Balmer Verlag, Zug 2003 – 7. Schuljahr, S. 70)

1. Sachsituation

Wie viele verschiedene Spielsteine enthält ein kompletter Dominosatz?
Jeder Spielstein ist ein Rechteck, der aus zwei aneinander gefügten Quadraten besteht. Auf jedem Quadrat sind Augenzahlen wie bei einem Spielwürfel aufgemalt. Anders als beim Würfel kommt beim Domino auch die Augenzahl Null vor.

2. Strategien entwickeln

Die Sch. arbeiten in Kleingruppen und sollen ihre Denkergebnisse veranschaulichen und strukturieren. Eine geeignete Darstellung wäre hier eine Tabelle mit doppeltem Eingang. Vor- und Nachteile der einzelnen Darstellungen werden diskutiert.

Fazit:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6
1		1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2			2/2	2/3	2/4	2/5	2/6
3				3/3	2/4	2/5	2/6
4					4/4	4/5	4/6
5						5/5	5/6
6							6/6

- Die untere Hälfte der Tabelle fällt weg, da die Reihenfolge der Zahlen auf den Steinen keine Rolle spielt.

3. Erweiterte Aufgabe

- Es gibt 28 Möglichkeiten ($7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$) zwei Zahlen aus einer Menge von 7 Zahlen auszuwählen.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen passenden Dominostein aus den verbleibenden 27 zu ziehen?
- Anzahl Steine bestimmen, wenn der Zahlenraum verändert wird; zum Beispiel 0 bis 5 oder 0 bis 7.
- Fantasiedominospiele entwickeln: Farbe, Bilder, ...



Bemerkung:

Die Aufgaben sollten so ausgewählt werden, dass diese mithilfe von Darstellungen gelöst werden können. Die Formeln spielen hier keine Rolle.

- Fahne anfärben (2 Bereiche, 4 Farben)
- Legotürme bauen (z.B. 4 Farben mit/ohne Wiederholung)

4.5. Anhang

Abbildung 1 Unterstufe – Kombinatorik

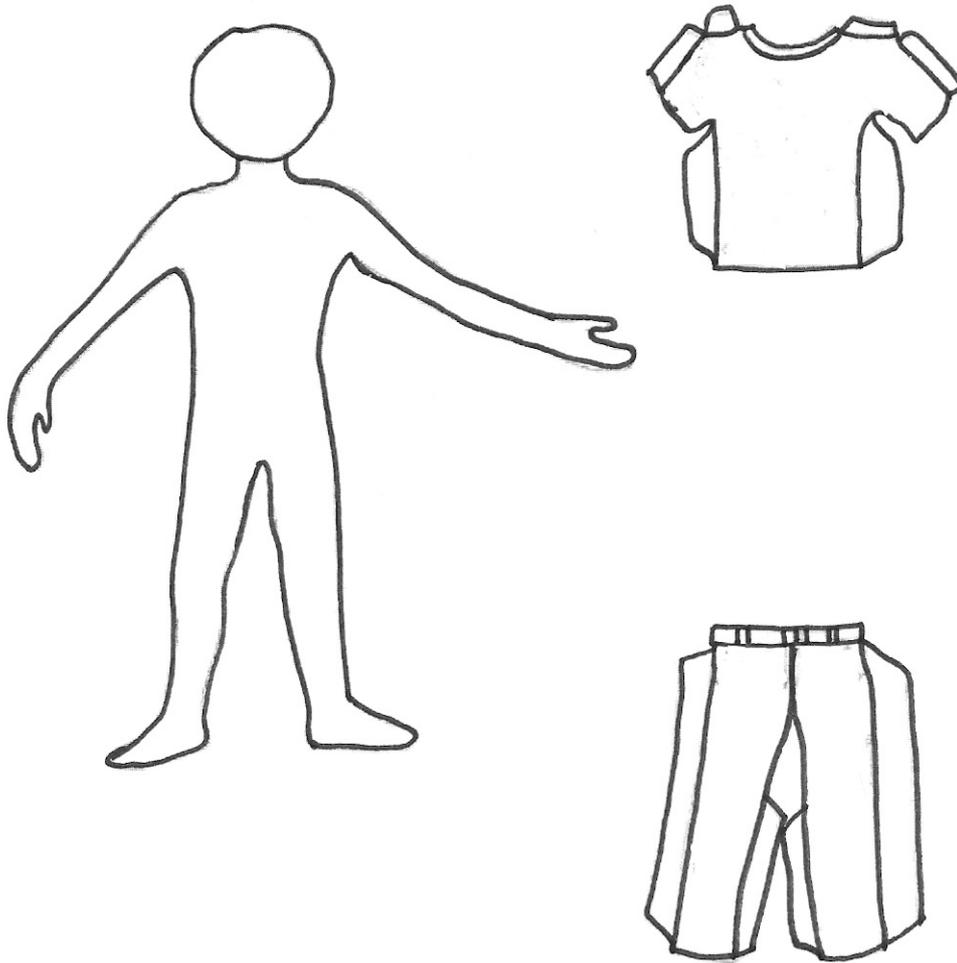


Abbildung 2 Unterstufe – Kombinatorik

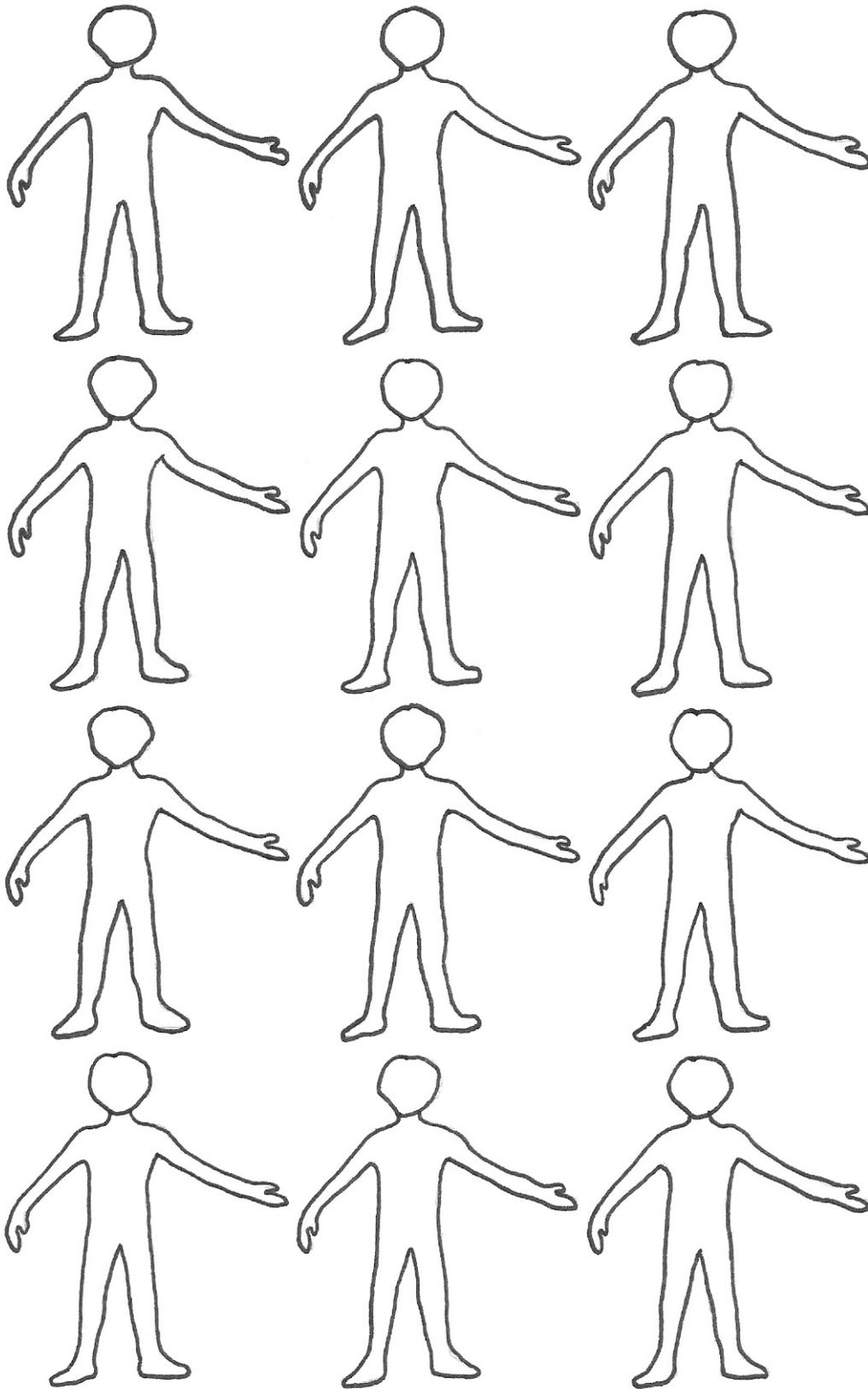
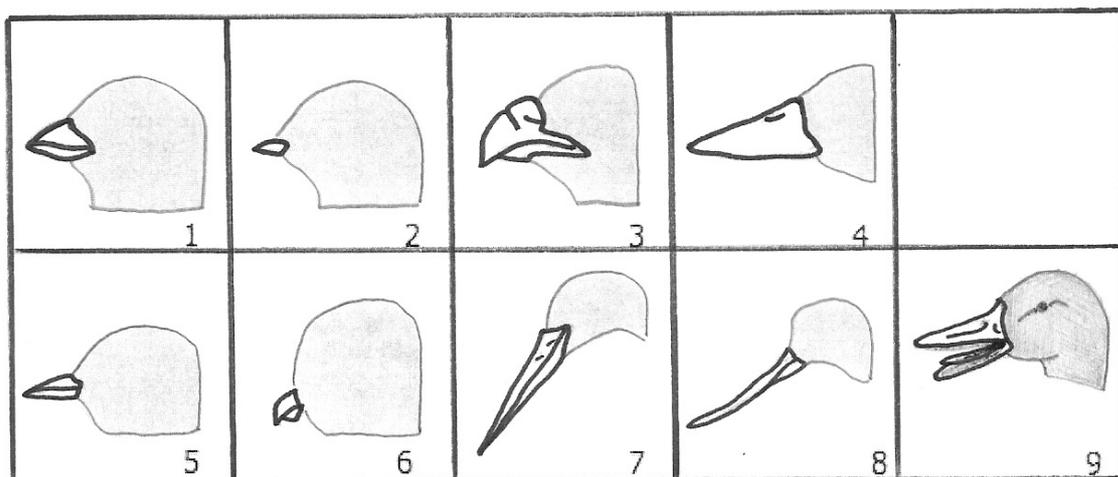


Abbildung 3 Mittelstufe - Kombinatorik

Die Vögel werden in Frucht-, Insekten-, Fisch- oder Fleischfresser unterteilt.

Beispiele verschiedener Schnabel-Formen und was damit von wem gefressen wird. Dies sind die wesentlichsten Schnabelformen.

Schnabelform	Nahrung	Beispiele	Nummer
Dünnere und spitzer Schnabel	Insekten und Beeren	Amsel, Drossel	5
Kurzer, dünner und flacher Schnabel	Fluginsekten	Schwalben, Mauersegler	2
Kurzer, konischer Schnabel	Samen	Sperlinge, Finken, Stieglitze	1
Langer, dolchförmiger Schnabel	Fische, Mäuse	Reiher	7
Großer hakenförmiger Schnabel	Fleisch	Adler, Bussarde, Geier	3
Langer, dünner, gebogener Schnabel	Insekten, Schnecken	Watvögel, Strandläufer	8
Kurzer, hakenförmiger Schnabel	Früchte, Beeren	Sittiche, Papageien	6
Großer, dreieckiger Schnabel	Gräser, Wasserpflanzen Getreide	Schwäne, Gänse	4
Abgeflachter Schnabel	Muscheln, Insekten	Enten, Reiherenten	9



3

³ Guichard J. (1998). *Observer pour comprendre les sciences de la vie et de la terre*. Hachette Education: Paris (Cedex)

Fußform	Lebensraum	Funktion	Beispiele	Nummer
Kräftige Füße mit gebogenen Krallen	Nicht spezifisch	Greifen	Raubvögel	3
Schwimmfüße	Wasser	Schwimmen	Schwimmvögel	2
Feine, lange Füße	Im/am Wasser	Gehen	Stelzvögel	1
Kurze, gedrungene Füße mit flachen Krallen	Erde/Boden	Laufen	Laufvögel	4

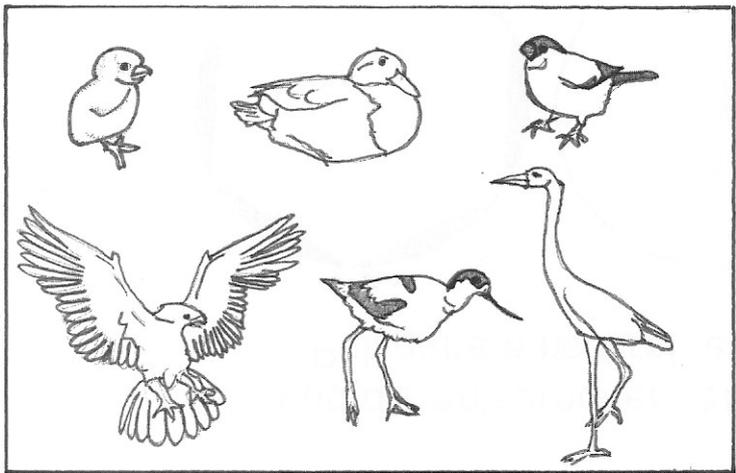
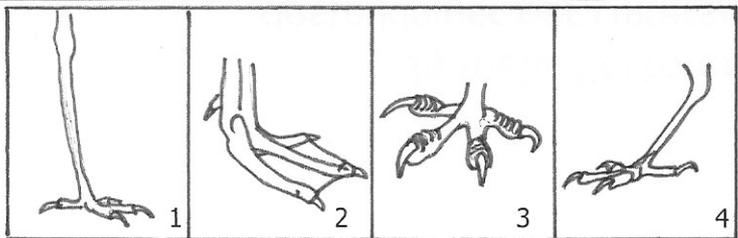


Abbildung 4 Mittelstufe - Kombinatorik

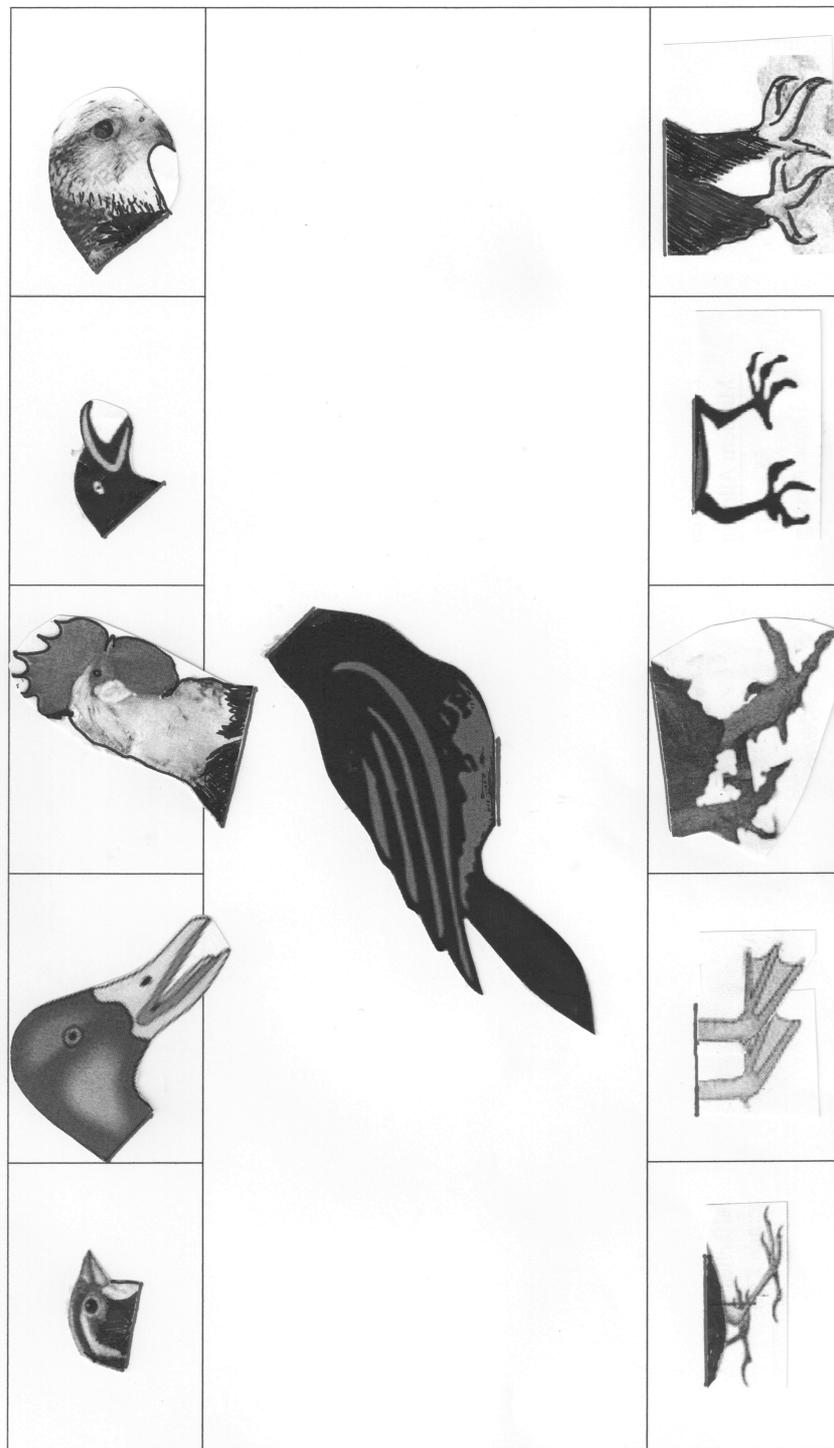


Abbildung 5 Mittelstufe - Kombinatorik

Wie viele Schmetterlinge gibt es?

- Der Körper kann braun oder schwarz sein.
- Die Flügel sind rot, gelb, blau oder mehrfarbig.
- Auf den Flügeln sind/sind keine Augenflecken.

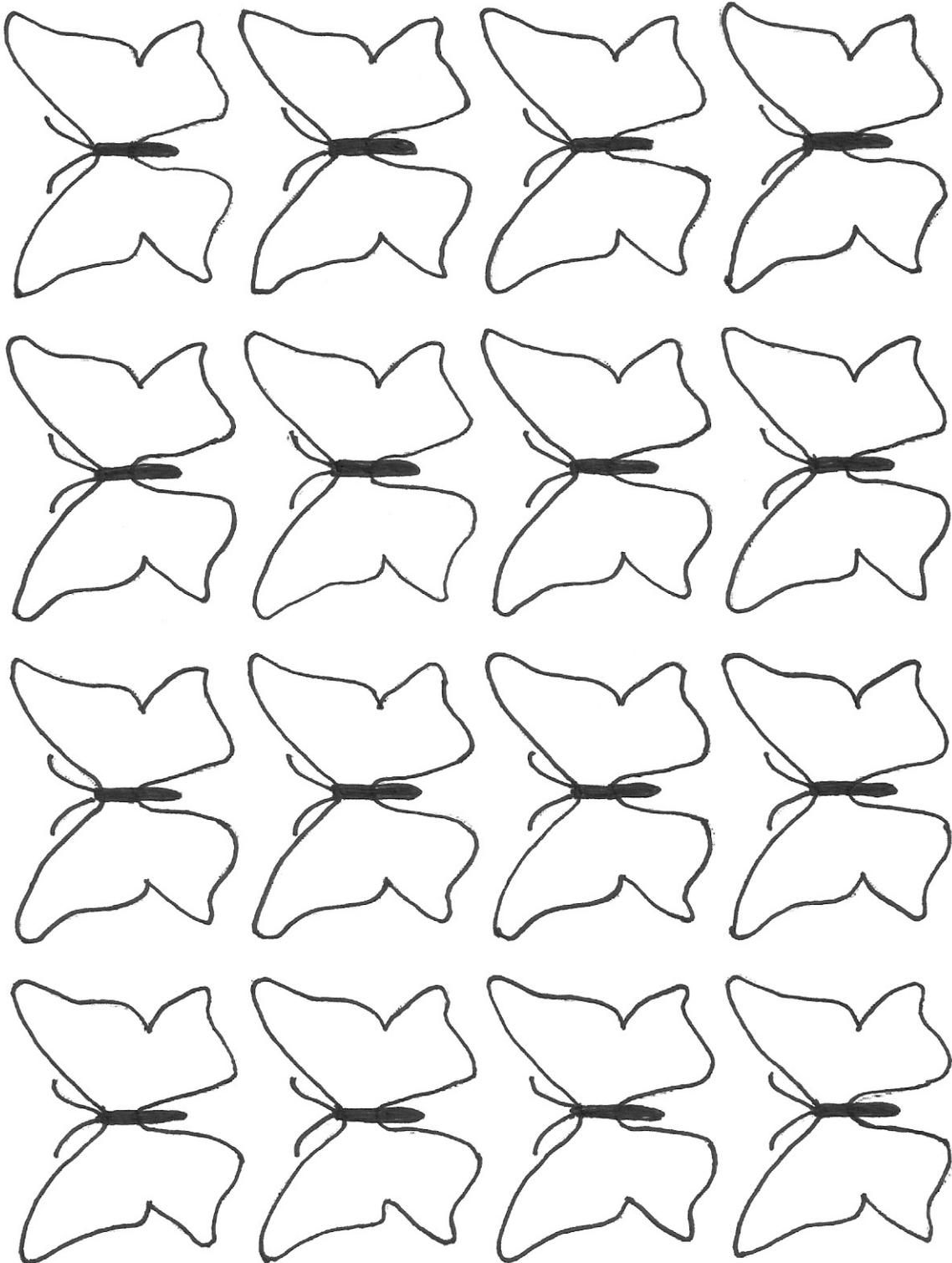
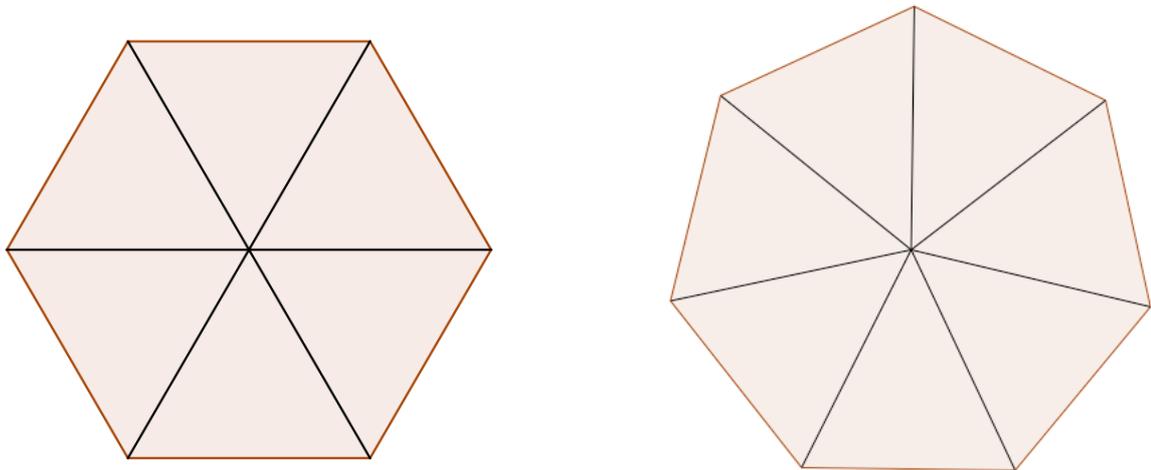
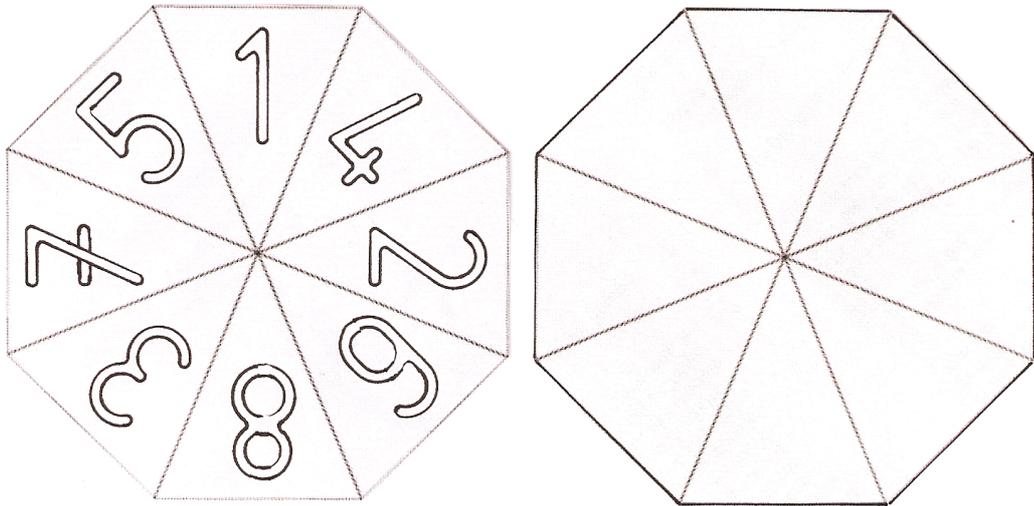
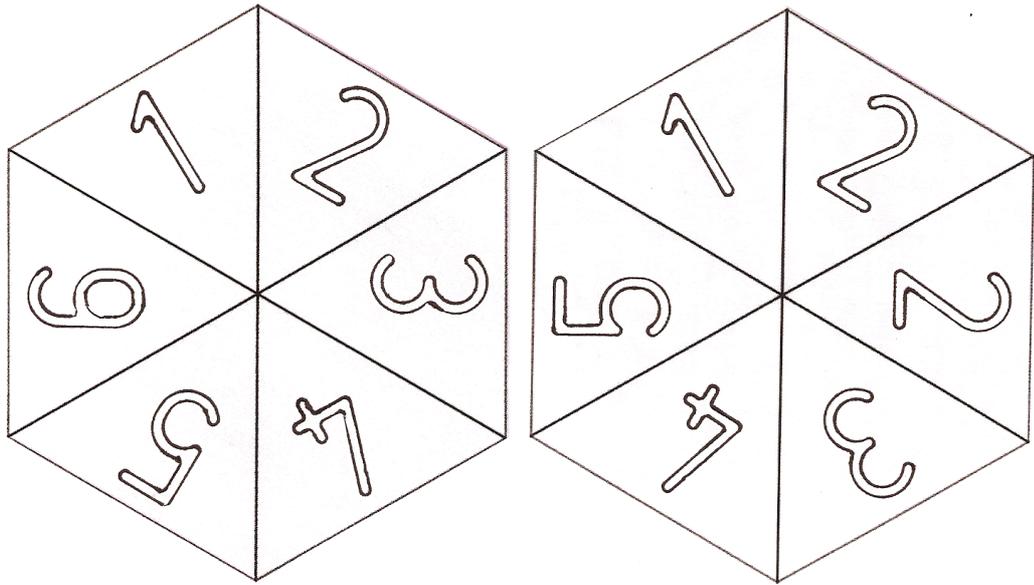


Abbildung 6 : Kreisel



Stichwortliste

	Seite(n)
Balkendiagramm	18
Baumdiagramm	15
Elementarereignis	20
Ereignis	20
Gewinnchancen	27
Häufigkeit, absolute	10 – 18
Häufigkeit, relative	27
Laplace-Experimente	11
Median (Zentralwert)	24
Merkmale	17
Merkmalsausprägungen	17
Merkmalsträger	17
Mittelwert, arithmetischer	24
Modalwert (häufigster Wert)	24
Permutation	29
Qualitativ	6
Quantitativ	6
Säulendiagramm	18
Streifendiagramm	18
Stabdiagramm	18
Wahrscheinlichkeitsrechnung	28
Zufallsexperiment	20

Literatur

- Guichard J. (1998). *Observer pour comprendre les sciences de la vie et de la terre*. Hachette Education: Paris (Cedex)
- Kraft B. (2009). Materialpaket DaZ: Das bin ich. Lernbiene Verlag: Saulgrub

Zeitschriften

- Bausteine Grundschule 3.+4. Schuljahr: Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten (5/2010). Bergmoser + Höller Verlag AG
- Grundschule Magazin für Aus- und Weiterbildung: Wahrscheinlichkeit (Heft 5, Mai 2010). Westermann
- Grundschule Mathematik: Daten erheben und deuten (Nr 21, 2. Quartal, 2009). Kallmeyer
- Grundschule Mathematik: Kombinatorik (Nr 27, 4. Quartal, 2010). Kallmeyer
- Grundschule Mathematik: Wahrscheinlichkeit: Wer gewinnt? (Nr 9, 2. Quartal, 2006). Kallmeyer