Autonome Hochschule in der Deutschsprachigen Gemeinschaft

MATHEMATISCHES MODELLIEREN IN DER PRIMARSCHULE

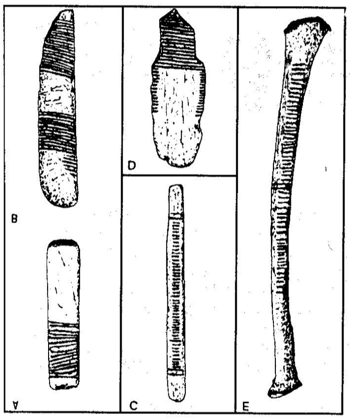
Fachgruppe für Mathematik und Naturwissenschaften – Brüll Karl-Heinz, Hoeven Marie-Christine, Schnackers Catherine, Sevrin Evelyne

Einleitung: Modellieren kurz dargestellt

1. Was ist Modellieren?

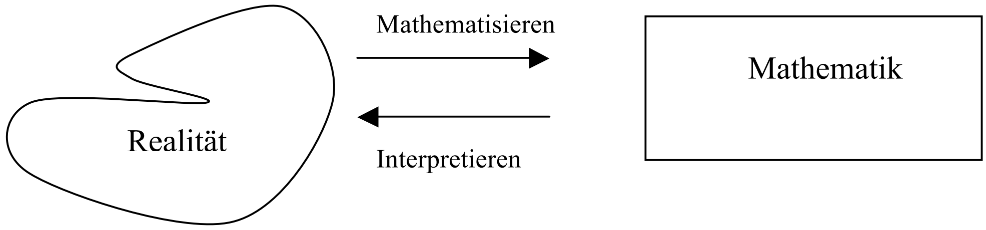
Die Kernkompetenz „Modellieren“ eröffnet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, mithilfe der Mathematik die Umwelt zu erschließen. Durch den schrittweisen Aufbau dieser Kompetenz erwerben Kinder die Fähigkeit, die Realität mit der Mathematik zu verbinden und in Situationen des Alltags den Bezug zur Mathematik herzustellen, d.h. die Mathematik als Werkzeug zu benutzen.

Seit jeher haben die Menschen mathematische Modelle genutzt, um Alltagsprobleme zu lösen.

➢ Was verstehen wir unter Modellieren? Modell-ieren = ein Modell erstellen/aufbauen/nutzen ➢ Wovon ein Modell erstellen? Von komplexen realistischen Problemen ➢ Womit? Mithilfe von mathematischen Modellen, die als Übersetzungswerkzeuge eingesetzt werden. ➢ Warum? Um die Welt zu erschließen.	Das komplexe Problem (aus der Geschichte der Menschheit): Wie viele Tiere hat der Jäger erlegt? Einkerbungen in Knochen (35 000 J. v. Chr.)  [1] Es sind die ersten bekannten Modelle von Zahlen. Die Jäger konnten ihre Jagdergebnisse festhalten und miteinander vergleichen.

[1] Recherche en éducation-rapportfinal-pouruneculturemathématiqueaccessibleàtous-élaborat(ressource3021).pdf

2. Kerngeschehen des Modellierens = Übersetzungsarbeit (Spracharbeit)



Übersetzung von der Realität in die Mathematik = Mathematisieren

Eine Situation kann durch mehrere Modelle dargestellt werden.
3 Wildtiere dargestellt durch 3 Striche, Ziffer 3, III, ...

Ein Modell kann auf mehrere Situationen übertragen werden.
Ziffer 3 entspricht 3 Wildtieren, 3 Häusern, 3 Äpfeln, ...

Übersetzung von der Mathematik in die Realität = Interpretieren

3. Wie Modellieren lernen?

- Kinder lösen komplexe außermathematische und innermathematische Probleme,
- entwickeln eigene mathematische Modelle,
- die sie festhalten, vergleichen, vereinfachen, auf Effizienz überprüfen,
- damit schaffen die K. authentische mathematische Werkzeuge,
- diese sind in anderen Situationen anwendbar.

4. Leitmotive

- Mathematik ist kein Selbstzweck.
- Der Weg ist das Ziel.
- Das Modellieren ist eine Kompetenz, die sich langfristig bei der Bearbeitung von authentischen Situationen entwickelt.

1. Vom Sachrechnen zum Modellieren

1.1. Ziele und Funktionen des Sachrechnens

Winter[2] unterscheidet drei Funktionen des Sachrechnens:

Sachrechnen als *Lernstoff*:
Zum Lernstoff zählen neben dem Umgang mit Größen auch Verfahren und Begriffe der Stochastik. Es geht also vorwiegend um die Förderung von Rechenfertigkeiten und –fähigkeiten
(Primat des Rechnens).

Sachrechen als *Lernprinzip*:
Der Bezug zur Erfahrungswelt der Kinder kann im Unterricht genutzt werden z.B. als Einstieg in Lernprozesse, als Veranschaulichung mathematischer Begriffe und als Einübung und Anwendung mathematischer Begriffe und Verfahren. Sachrechnen als Lernprinzip bedeutet, dass Bezüge zur Realität gesetzt werden, um die Schüler für den Stoff zu interessieren, ihr Verständnis zu fördern und den mathematischen Stoff zu üben[3] (Primat des Rechnens).

Sachrechnen als *Lernziel*:
„Dies ist die umfassendste Funktion des Sachrechnens, in ihr sind die vorgenannten aufgehoben. Es ist auch die wichtigste und unterrichtspraktisch am schwierigsten zu verwirklichende Funktion."

Das Sachrechnen ist ein Mittel im Dienst des übergeordneten Ziels, das Verständnis der Kinder für die Welt, in der sie leben, zu fördern. Gerechnet wird nur, wenn es der Förderung des Sachverständnisses dient[4] (Primat der Sache).

1.2. Typen des Sachrechnens

Aufgabentyp	Charakterisierung	Beispiele	Ziele
Eingekleidete Aufgabe	In Worte gefasste Rechenaufgaben Sachtexte, die eine direkte Umsetzung einer Grundvorstellung fordern.	Welche Zahl ist um 14 kleiner als der 5. Teil von 130? Bilde das Produkt aus der Summe und aus der Differenz der Zahlen 18 und 12. 420 l werden gleichmäßig auf 3 Behälter verteilt.	Anwenden und Üben von Rechenfertigkeiten und Rechenfähigkeiten sowie Einüben von mathematischen Fachbegriffen. Ein Sachmodell muss nicht entwickelt werden. Überprüfen von Grundvorstellungen.
Textaufgabe	In Textform dargestellte Aufgaben, bei denen die Sache weitgehend bedeutungslos und austauschbar ist. Die Vielfältigkeit und Komplexität der Sache in der Realität werden bei derart konstruierten Aufgaben nicht berücksichtigt.	Herr Guder hat 1972 € auf seinem Lohnkonto. Er überweist 624 € für Miete, 148 € für Gas und Elektrizität sowie 16 € Vereinsbeitrag. Außerdem hebt er 900 € ab.	Das Ziel liegt in der Förderung von Rechenfähigkeiten. Der Sachverhalt spielt faktisch keine Rolle. Bei dieser schulischen Kunstform liegt die Hauptanforderung in der direkten „Übersetzung" der im Text gegebenen Informationen

[2] Winter, H. (1985). *Sachrechnen in der Grundschule*, 1. Auflage. Berlin: Cornelsen
[3] Franke, M. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
[4] Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel, S. 42

			in Gleichungen der mathematischen Fachsprache. Textaufgaben bilden den Schwerpunkt des traditionellen Sachrechnens.
Sachaufgabe	Die Sache selbst steht im Vordergrund, die Mathematik liefert nur Hilfsmittel zur Bearbeitung bzw. Erschließung. Alltagswissen über Sachzusammenhänge muss vorhanden sein.	Der Wasserbedarf eines Menschen liegt bei 125 l pro Tag. Ein Liter Öl kann eine Million Liter Wasser ungenießbar machen.	Anwendung mathematischen Wissens in realistischen Sachsituationen. Es besteht ein echtes Interesse an der Sache.
Sachproblem Sachprojekt	Komplexe realitätsnahe Sachprobleme, deren Bearbeitung ein sicheres Verständnis der Sachsituation erfordert. Im Bearbeitungsprozess müssen Entscheidungen getroffen werden, die zu verschiedenen Lösungen führen können.	Den Klassenausflug nach Brüssel könnten wir mit einem Bus oder mit der Bahn durchführen. Was ist preiswerter, praktischer? Welche Kosten kommen noch hinzu? Wie viel kostet der Ausflug dem Schüler? ...	Lösung eines tatsächlichen Problems mit verschiedenen Modellierungen auf der Basis unterschiedlicher Annahmen. Die Bearbeitung des Problems soll zum Erkenntniszuwachs in der Sache führen.

Nicht in der Tabelle aufgenommen sind Denkaufgaben sowie Fermi-Probleme (siehe 4.4.3).

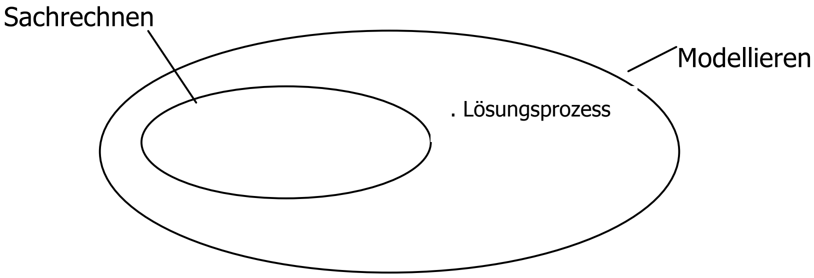
1.3. Erweiterung des Begriffs „Sachrechnen“

Sachrechnen als Mathematisierungs- bzw. Modellierungsprozess (Primat des Lösungsprozesses):
Im Sinne des Modellierens dienen Sachaufgaben nicht mehr nur der Förderung der Rechenfähigkeit, auch nicht mehr nur der Umwelterschließung durch ihre rechnerische Durchdringung. Im Mittelpunkt der unterrichtlichen Bemühungen steht vielmehr der Prozess der Lösung von Problemaufgaben. Die Kinder sollen lernen, selbstständig Probleme zu lösen, für die sie noch keine Lösungsverfahren gelernt haben.
Diese Erwartung ist auch Umsetzung unserer heutigen Vorstellung von Mathematiklernen als ein Prozess der eigenen, aktiven und sozial vermittelten Aneignung mathematischer Kompetenzen (siehe Kernkompetenz – Rahmenplan (S. 16)).

1.4. Fazit

Modellierungsprozess – Primat des Lösungsprozesses	
Sachaufgaben	Innermathematische Aufgaben
SACHE	SACHE
Realität	Mathematik
Projekt (Ausflug planen, Aquarium für die Klasse, Schulhofgestaltung, Papierverbrauch einer Schule, Wasserverbrauch, Stromverbrauch,...) Authentisch in Bezug auf die Realität	Die meisten Fermi-Aufgaben (Wie viele Nadeln sind auf einer Fichte?) Authentische Aufgaben in Bezug auf die Mathematik

Primat des Lösungsprozesses → Primat des Rechnens
Primat des Lösungsprozesses → Primat der Sache



Sachrechnen + Lösungsprozess = Modellieren

2. Was ist Modellieren?

Unter Modellieren werden alle Prozesse verstanden, die zu Lösungen führen und in einem realitätsnahen Unterricht stattfinden. Modellieren bedeutet, komplexe, realistische Probleme mithilfe von Mathematik zu lösen. Der grundlegende Gedanke des Modellierens und damit des Anwendens von Mathematik auf die Realität ist die Erstellung eines Modells
(siehe Etappen des Modellierungsprozesses).

2.1. Kriterien von Modellierungsaufgaben

Modellierungsaufgaben sind:

- authentisch
- offen
- realitätsnah
- komplex
- problemhaltig
- lösbar durch Ausführen eines Modellierungsprozesses (muss immer vorhanden sein)

Jede Modellierungsaufgabe kann anhand obiger Kriterien beurteilt und eingeordnet werden, doch braucht sie nicht alle Kriterien zu erfüllen.

2.1.1 Kriterium der Authentizität[5]

Mathematikaufgaben sind authentisch, wenn sie Schülerinnen und Schüler anregen, mathematische Tätigkeiten, die typisch für die Entstehung und Anwendung von Mathematik sind, auszuführen und zu reflektieren.
Authentisch von der Sache her ist eine Problemstellung, wenn sie inner- oder außermathematisch relevant ist.
Authentisch von den Lernenden her ist eine Problemstellung, wenn diese sich ihrer tatsächlich annehmen, sich auf sie einlassen, wobei der zweite Punkt unterrichtlich der entscheidende ist. [6]
Wird Mathematik im Unterricht auf diese Weise betrieben, so ist sie in der Lage, bei SchülerInnen ein stimmiges, authentisches Bild von Mathematik aufzubauen.

[5] Büchter A, Leuders T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Berlin: Cornelsen.
[6] Herget, B., Jahnke, T. & Kroll, W. (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen

Ein authentisches Bild von Mathematik

Mathematik ist ein universelles Werkzeug, um numerisch quantifizierbare und geometrisch darstellbare Strukturen zu erfassen, ob sie nun aus unserer Umwelt stammen oder Produkte des Denkens sind. (Mathematik als eine Form der Weltaneignung)

Die in der Mathematik stattfindenden Prozesse des Argumentierens, des Modellierens oder der Begriffsbildung zeichnen sich durch eine für das Fach charakteristische und objektivierende Klarheit aus. (Mathematik als eine besondere Form der Weltaneignung)

In der Mathematik kann sich jeder Mensch individuell bewegen, in dem er oder sie die reale und gedankliche Welt erkundet, nach Strukturen sucht, Fragen stellt und Probleme löst. (Mathematik als eine Form der individuellen Weltaneignung)

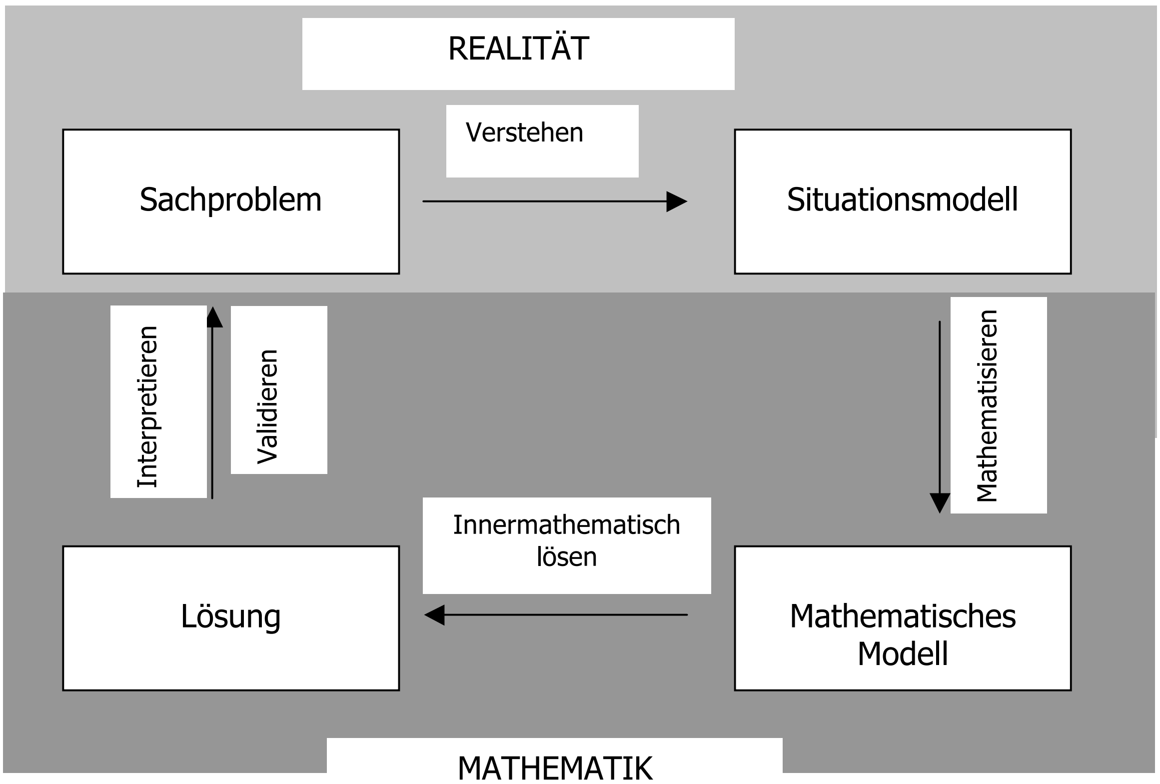
2.1.2 Kriterium der Offenheit

Aufgabentypen werden danach unterschieden, wie offen sie sind bezüglich:

- der Informationen über die Ausgangssituation (Start)
- der Methode bzw. des Lösungsverfahrens (Weg) und
- ihrer Lösung bzw. ihres Ergebnisses (Ziel)

2.2. Modellierungsprozess

Unter Modellieren versteht man, eine Sachsituation in ein mathematisches Modell zu übertragen. Dazu ist es erforderlich, den mathematischen Stellenwert eines Problems zu erkennen, die benötigten Daten zu sichten und einen geeigneten Lösungsweg zu finden. Das Ergebnis ist in Hinblick auf die Sachsituation zu interpretieren und auf seine Gültigkeit zu überprüfen[7].

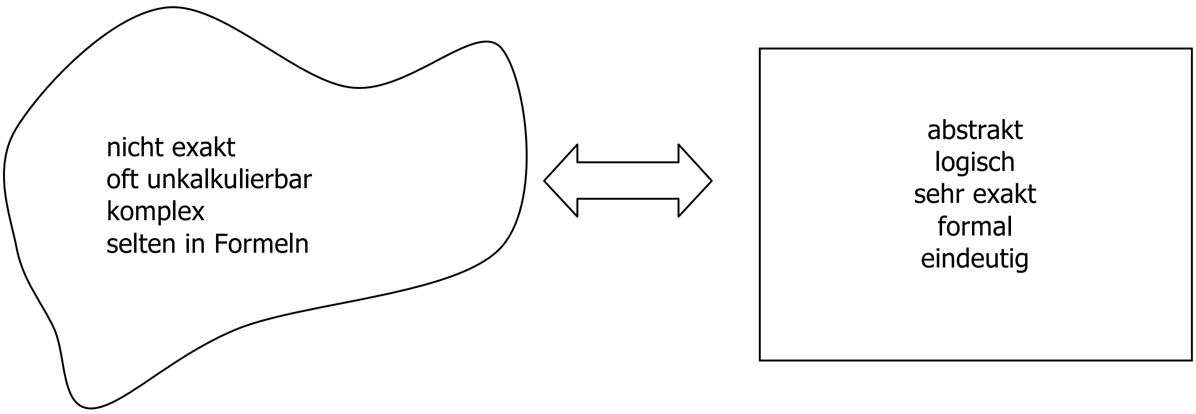


[7] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"*, Graz: Leykam

2.2.1 Erklärung zum Modellierungsprozess

1) Realität – Mathematik

Modellieren findet immer dann statt, wenn wir Mathematik in Beziehung setzen zur Realität, die nicht kalkulierbar und komplex sowie selten in Formeln erfassbar ist.
Die Mathematik kann nur als Instrument eingesetzt werden, wenn wir die Situation in ein mathematisches Modell übersetzen können. Dies ist nur möglich durch eine geeignete „Reduzierung" der Anwendungssituation.



2) Etappen des Modellierungsprozesses

Sachproblem
Ein Sachproblem bezieht sich stets auf die reale Welt. Es kann sich dabei um eine reale Situation handeln; Sachprobleme können aber auch durch ein Bild oder einen Text aus der Welt des Kindes entnommen werden.

Situationsmodell
Das Situationsmodell stellt die Sichtweise des Kindes dar und beschreibt, wie das Sachproblem aufgefasst wurde. Dabei kann auf bekannte Strukturen zurückgegriffen werden oder es müssen neue Strukturen gebildet werden.

Mathematisches Modell
Modelle bilden einen bestimmten Teil der Realität abstrakt ab. Sie reduzieren die Komplexität und Abstrahieren vom Konkreten. Das mathematische Modell ist ein Bestandteil der allgemeinen Kompetenz Modellieren. Es kann unterschiedliche Formen annehmen: Zahlen, Rechenausdrücke, Zahlenfolgen, Grafen, geometrische Figuren, Algorithmen, ...

📖 *Algorithmus[8] kurz erklärt:*

Ein Algorithmus ist ein für seine spezifischen Anwendungsfälle allgemein gültiges, in seiner Abfolge festgelegtes, eindeutig beschriebenes Verfahren, das nach endlichen vielen Schritten und unabhängig von der Person, die diesen Algorithmus durchführt, zur Lösung führt.
Ein mathematischer Algorithmus ist nichts anderes als eine standardisierte Problemlösung für eine Klasse strukturell verwandter Probleme. Die schriftlichen Rechenverfahren sind Beispiele für einen mathematischen Algorithmus.

[8] Duden. Definitionen: Algorithmus. Verfügbar unter http://www.duden.de/suchen/dudenonline/Algorithmus [12.10.15]

Bemerkung:

Modelle werden zu bestimmten Zwecken gebildet.

Es gibt Modelle,
- die vorhersagen (z.B. Wettervorhersage)
- die erklären (z.B. warum Vögel beim Schlafen nicht von der Stange fallen)
- die beschreiben (z.B. wie das Auge aufgebaut ist)
- die vorschreiben (z.B. das Modell für die Einkommensteuerberechnung).

Die ersten drei Arten von Modellen dienen dazu, die Realität genauer abzubilden und werden daher als deskriptiv bezeichnet, das letzte als normativ. Normative Modelle definieren einen Teil der Realität und realisieren damit gewisse Zielvorstellungen des Modellbildners. Beispiele dafür, die auch auf Grundschulniveau erfassbar sind, sind zum Beispiel Eintrittspreise für Schwimmbäder, Vereinsbeiträge, Regeln zur Wahl des Klassensprechers, ...
Mathematische Modelle sind beschreibend und normativ.
Zum Beispiel: Operationen, Formeln, Verfahren, Tabellen, Grafen, ...

Lösung
Durch das Anwenden von heuristischen Strategien und mathematischen Algorithmen erhält man im Idealfall eine mathematische Lösung.

> 🕮 *Heuristik[9] kurz erklärt:*
> *Heuristik ist die Lehre oder Wissenschaft von den Verfahren Probleme zu lösen.*
> *Heuristische Strategien sind Lösungsfindeverfahren.*
> *Anders als bei Aufgaben, die durch Anwendung bekannter Regeln zu lösen sind, gibt es bei Problemen Hindernisse auf dem Weg zur Lösung. Wir brauchen Methoden zur Gewinnung neuer Erkenntnisse. Diese nennt man - nach dem griechischen Wort für „finden" - Heuristiken.*

3) Schritte zwischen den jeweiligen Etappen

Verstehen
Ausgehend von einem fiktiven oder realen Problem wird mithilfe eigener Erfahrungen bzw. entsprechender Denkstrategien das Problem erfasst. Beim sinnentnehmenden Lesen der Aufgabenstellung wird zunächst ein mentales Modell der Situation konstruiert, das so genannte Situationsmodell. Dieses Modell konstruiert jeder Schüler individuell. Dabei kann auf unwichtige Details verzichtet werden (Abstrahieren), d.h. wichtige Daten identifizieren und hervorheben, sie strukturieren, Fragestellung präzisieren und kommunizieren. Aus diesen Teilschritten ergibt sich ein *Situationsmodell*.

Mathematisieren
Mathematisieren bezeichnet die Fähigkeit, Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten zu erfassen und das mathematisch Relevante herauszulösen, z.B. durch Messen, Zählen, Schätzen, Finden der passenden Rechenoperation, Finden von möglichen Lösungswegen, ...
Kurz gesagt, das Situationsmodell wird in die mathematische Sprache übersetzt, d.h. mithilfe mathematischer Zeichen festgehalten. Die Darstellung kann in Form einer Gleichung, eines Rechensatzes, eines Rechenplans oder einer Grafik bzw. durch individuelles Dokumentieren der Rechenschritte erfolgen.

Innermathematisch lösen
Mittels mathematischer Verfahren (schriftliches Rechnen, Kopfrechnen, ...) wird eine Lösung des mathematischen Modells erarbeitet. Die Lösung ist das Ergebnis der mathematischen Transformation.

Interpretieren, Validieren

---

[9] Duden. Definitionen: Heuristik. Verfügbar unter http://www.duden.de/suchen/dudenonline/Heuristik [12.10.15]

Die aus dem Verarbeiten gewonnenen Ergebnisse werden mit der realen Situation in Zusammenhang gebracht (z.B. passende Antwort, genaue Zeichnung, ...) und auf ihre Plausibilität überprüft. Außerdem soll ein Rückblick auf den gewählten Lösungsweg dahingehend erfolgen, ob dieser zielführend war (z.B. Verbalisieren, Argumentieren des Lösungswegs, ...).
Das Ergebnis, das das Kind errechnet oder geometrisch dargestellt hat, wird mit der ursprünglichen Fragestellung in Zusammenhang gebracht und gedeutet.

4) Veranschaulichung des Modellierungsprozess an einem vereinfachten Beispiel (5. Schuljahr)

Schema	Beispiel	Modellierungsprozess
Sachproblem	Philipp meint, dass er zu viel Zeit in der Schule verbringt. „Die meiste Zeit des Jahres sitze ich in der Schule“, seufzt er. Was meinst du dazu?	Ausgangspunkt des Modellierens ist in der Regel eine komplexe problemhaltige Situation, für die man eine Lösung sucht.
Sachproblem Verstehen Situationsmodell	Ausgehend von Fragen und Feststellungen werden z.B. folgende vereinfachende Annahmen getroffen: - Es gibt 15 Wochen Ferien im Jahr. - In der restlichen Zeit ist man an 4 Tagen für ca. 6 Stunden in der Schule und an einem Tag für 4 Stunden. - Feiertage und mehrtägige Ausflüge werden nicht berücksichtigt. Folgendes Vorwissen muss geklärt werden: - 1 Jahr = 365 Tage = 52 Wochen - 1 Tag = 24 Stunden	Die vorgegebene Situation in der Realität muss zunächst vereinfacht, idealisiert und strukturiert werden. Dadurch entsteht ein Modell der Realität, das sogenannte Situationsmodell. Das Situationsmodell ergibt sich aus dem Vergleich der Anzahl Stunden im Jahr und der Anzahl Stunden, die ich in der Schule verbringe.
Situationsmodell Mathematisieren Math. Modell	Aufstellen der Gleichungssätze mithilfe der Grundoperationen. 1. Anzahl Stunden an 4 Tagen (Mo, Di, Do, Fr) in der Schule (52 – 15) x 4 x 6 = 2. Anzahl Stunden am Mittwoch in der Schule (52 – 15) x 4 = 3. Gesamtstundenzahl eines Jahres 365 x 24 =	Das Mathematisieren des Situationsmodells, also die Übersetzung der Modellbeschreibung aus der Sprache des Alltags in die Sprache der Mathematik, führt zum mathematischen Modell. Im mathematischen Modell wird das Situationsmodell mithilfe mathematischer Zeichen festgehalten. Die Darstellung kann in Form einer Gleichung, eines Rechenplans oder einer Grafik erfolgen.

Math. Modell Innermathematisch lösen ↓ Math. Lösung	Lösen der Rechensätze 1. 888 Stunden 2. 148 Stunden 3. 8760 Stunden Erforderliche Zwischenrechensätze: Gesamtstundenzahl in der Schule 888 h + 148 h = 1136 h	In dem mathematischen Modell können nun heuristische Strategien und mathematische Algorithmen angewendet werden. Man erhält – im Idealfall – eine mathematische Lösung.
Lösung 1) Interpretieren ↓ 2) Validieren ↓ Sachproblem	1) Interpretierte Lösung: Philipp verbringt ca. 1136 Stunden pro Jahr in der Schule. Das Jahr hat aber 8760 Stunden. Das sind ungefähr 8-mal so viele Stunden. Philipp verbringt also nicht die meiste Zeit in der Schule. 2) Validieren der Lösung: Das Ergebnis ist nur als Richtwert anzusehen, da es auf stark vereinfachte Annahmen beruht. Die Größenordnung von 1136 h erscheint jedoch plausibel. An dieser Stelle kann man entweder den Lösungsprozess beenden, weil man an einer genaueren Lösung nicht interessiert ist, oder man kann auch die Annahmen modifizieren und in einem zweiten Ansatz, beispielsweise die Schlafzeit abziehen, oder die Feiertage berücksichtigen, ...	1) Dieses Ergebnis muss im Hinblick auf das Sachproblem und die Fragestellung interpretiert werden. Man erhält die interpretierte Lösung. 2) Das Modellieren ist mit der Interpretation noch nicht beendet. Vielmehr muss über die gesamte Modellierung kritisch reflektiert werden. Das Ergebnis sollte durch das Vergleichen mit geeigneten Werten validiert werden. Erweist sich im Rahmen der Validierung (oder vorher) die gefundene Lösung oder das gewählte Vorgehen als der Realität nicht angemessen, so müssen einzelne Schritte oder der gesamte Modellierungsprozess erneut durchgeführt werden, sei es mit veränderten, vereinfachenden Annahmen oder mit anderen mathematischen Strategien. Die Entscheidung, welches Vorgehen als geeignet angesehen wird, liegt beim Modellierer. Das Modellieren enthält somit auch eine subjektive Komponente.

Bemerkung:
Die Kreislaufdarstellung des Modellierens (Abbildung S. 7) ist ein vereinfachtes Schema.
In den seltensten Fällen wird dieses Schema wie ein Algorithmus durchlaufen. In der Regel wird man z.B. schon bei der Bildung des mathematischen Modells überlegen, inwieweit man überhaupt über die nötigen mathematischen Kompetenzen zur Bearbeitung des Modells verfügt. Oder man bemerkt bereits beim Berechnen, dass das Modell nicht geeignet ist und sucht nach neuen Möglichkeiten. Insgesamt ist Modellieren ein komplexer Prozess, bei dem immer wieder zwischen verschiedenen Schritten gewechselt wird.

3. Warum Modellieren?

Es gibt verschiedene Gründe, weshalb mathematisches Modellieren Bestandteil des Mathematikunterrichts sein sollte.

3.1. Übergeordnete Ziele

Übergeordnete Ziele umfassen:
1) Kompetenzen zum Anwenden von Mathematik in einfachen und komplexen sowie in bekannten und unbekannten Situationen vermitteln und den Kindern helfen, Umweltsituationen zu verstehen und zu bewältigen.

2) Ein ausgewogenes Bild von Mathematik als Wissenschaft und ihre Bedeutung für unsere Kultur und Gesellschaft vermitteln. Die Lernenden sollen Bezüge zwischen Mathematik und Realität erkennen, Kenntnisse über den Gebrauch und Missbrauch von Mathematik erwerben und die Grenzen der Mathematisierbarkeit erfahren (kritische Beurteilung von Modellen).

3) Heuristische Strategien, Problemlöse- und Argumentationsfähigkeiten sowie kreatives und flexibles Denken entwickeln.

4) Kompetenzen im Kommunizieren einüben und mathematische Sachverhalte darstellen.

5) Zur Beschäftigung mit Mathematik motivieren sowie eine positivere Einstellung gegenüber der Mathematik entwickeln. Das Behalten und Verstehen von mathematischen Inhalten wird erleichtert.

6) Soziale Kompetenzen durch Arbeitsformen wie Gruppenarbeit und die Notwendigkeit der Zusammenarbeit aufbauen.

3.2. Modellierungskompetenzen

Sie dienen
- dem Verständnis eines Sachproblems
- der Aufstellung eines Situationsmodells und eines mathematischen Modells
- der Lösung mathematischer Fragestellungen innerhalb des mathematischen Modells
- der Interpretation mathematischer Resultate und der Validierung einer gefundenen Lösung
- dazu, auf einer Metaebene über Modellierungsprozesse nachzudenken und Metawissen über Modellierungsprozesse einzusetzen (siehe Kreislauf: 4 Stufenlösungsplan S.26).

📖 *Metakognition[10] kurz erklärt:*

Unter Metakognition versteht man das Denken über das Denken. Es umfasst eine deklarative (Inhalt) und eine exekutive (Prozesse) Dimension.
Das Metawissen ist dasjenige Wissen, das die Metakognition unterstützt.

---

[10] Duden. Definitionen: Metakognition. Verfügbar unter http://www.duden.de/suchen/dudenonline/Metakognition [12.10.15]

4. Modellieren – praktisch

4.1. Gestaltung des Unterrichts (Unterrichtskultur)[11]

Wie Kinder Mathematik erleben, hängt nicht vordergründig von den ausgewählten Inhalten ab, sondern von der Art und Weise, wie diese den Kindern näher gebracht werden. Entscheidend für das Entwickeln von Einstellungen zum Modellieren auf Seiten des Kindes wird auch sein, wie LehrerInnen ihren Unterricht gestalten.
Mögliche Fragen, die sich der Lehrer stellen kann, um seine Unterrichtskultur zu hinterfragen:

- Ermöglichen die Fragen eine motivierende Auseinandersetzung mit dem Thema?
- Wird auf die Erfahrung der Kinder Rücksicht genommen?
- Werden verschiedene Lösungsroutinen angeregt und zugelassen?
- Wird der Prozess des Lösens in den Mittelpunkt gerückt?
- Muss das Ergebnis immer richtig sein?
- Dürfen Fehler gemacht werden? Wie wird mit den Fehlern umgegangen?
- ...

4.2. Rahmen- und Lernbedingungen

Den Kindern
- altersadäquate Sachsituationen anbieten – wenn möglich von echten statt von konstruierten Sachsituationen ausgehen;
- Zeit geben, sachbezogene Fragen zu stellen;
- die Möglichkeit geben, eigene Sichtweisen und Lösungswege zu entwickeln;
- in verschiedenen Darstellungsebenen Operationsstrukturen anbieten, um die Grundvorstellungen von Rechenoperationen zu sichern;
- den Vergleich der Ergebnisse mit den zuvor durchgeführten Überschlagsrechnungen als Vorteil aufzuzeigen;
- nachhaltig bewusst machen, dass die Ergebnisse in Bezug auf ihre Gültigkeit zur Sachsituation hin überprüft werden sollen;
- Gelegenheiten eröffnen, ihren individuellen Lösungsweg schriftlich festzuhalten;
- bei Problemen passende Bearbeitungshilfen anbieten, die den Prozess des Sachrechnens unterstützen.

Während des gesamten Prozessablaufes sollen die Kinder aufgefordert werden, ihre Lösungsstrategien zu verbalisieren. Diese sprachliche Auseinandersetzung schafft Klarheit.
Divergente Denkweisen werden z.B. in Strategiekonferenzen bewusst gemacht.
Diese Form der Unterrichtskultur der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik ist ganz auf die Kernkompetenzen ausgerichtet. Es werden Probleme gelöst, es wird kommuniziert, argumentiert, strukturiert.

4.3. Selbstdifferenzierende Eigenschaften von Modellierungsaufgaben

Die Anbindung an die Realität fördert die Bereitschaft zur Auseinandersetzung mit Mathematik und motiviert die Schüler, sich mit mathematischen Sachproblemen zu befassen. Somit entstehen eine positive Einstellung und ein affektiver Zugang zur Mathematik.

Für leistungsschwächere Lernende verliert die sonst häufig abstrakte Mathematik ihren Schrecken; konkret vorstellbare, realistische Probleme können von ihnen bearbeitet werden.
Probleme im Umgang mit geschriebenen Texten für manche Lernende, insbesondere solche, die Deutsch nicht als Muttersprache haben, lassen sich durch verbale Präsentationen und Bilder überbrücken.

---

[11] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* (S. 10). Graz: Leykam.

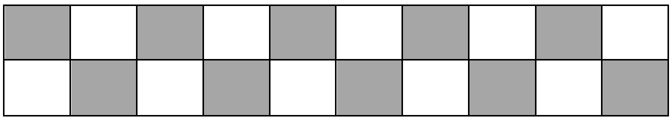
Leistungsstärkere Lernende werden dadurch herausgefordert, sich auf hohem Niveau mit einem realistischen Problem zu beschäftigen.

Offene Aufgabenstellungen ermöglichen zum Beispiel den eigenen Kompetenzen angemessene Lösungswege zu finden (Binnendifferenzierung).

Beispiel aus PIK AS (Dortmund)[12]:

Der Auftrag, die Hälfte eines Zahlenfeldes geschickt zu färben, erfordert die Beschäftigung mit geometrischen Mustern. Dabei kann die Symmetrie

als Mittel zur Problemlösung hilfreich sein. Unter Nutzung von Spiegelungen und Verschiebung können aus einem gefundenen Muster weitere entwickelt werden.



Es gibt noch weitere Lösungen: ...

4.4. Woher Modellierungsaufgaben nehmen?

Die „Mathe-Brille" hilft,
- Modellierungsaufgaben im Alltag zu entdecken;
- Modellierungsaufgaben selbst zu konstruieren;
- sich an den Bedürfnissen von Schülerinnen und Schülern zu orientieren;
- Schulbuchaufgaben in Modellierungsaufgaben umzuwandeln;
- Modellierungsaufgaben in Schulbüchern zu nutzen.

Betrachten wir beispielsweise folgende Fragestellung: Wie viele Autos stehen in einem 5 km langen Stau?
Um dieses Problem zu lösen, muss die Unterrichtskultur so angelegt werden, dass die Schüler und Schülerinnen befähigt werden, die notwendige Strategie zur Lösung zu entwickeln und die Einsicht haben, dass solche Probleme mithilfe von Mathematik lösbar sind.
Um Schüler an das Modellieren heranzuführen, sollte man Aufgaben schrittweise öffnen.
Das bedeutet zum Beispiel:

- Aufgaben zu benutzen[13], die mehr Angaben haben als nötig oder bei denen Informationen fehlen;
- Aufgaben auszuwählen, die das Argumentieren einfordern („Was meinst du dazu?", „Begründe wieso!");
- Aufgaben als Beispiel anzuführen, die nicht lösbar sind („Jede Mathematikaufgabe hat eine Lösung!");
- Aufgaben zu behandeln, die mehrere Lösungen haben;
- Aufgaben anzupacken, die mehr Zeit benötigen als andere.

---

[12] PIK AS. Die Hälfte färben. Verfügbar unter http://pikas.dzlm.de/material-pik/mathematische-bildung/haus-2-unterrichts-material/die-haelfte-faerben/index.html [12.10.15]

[13] Humenberger, H. (2003). *Dreisatz einmal anders: Aufgaben mit überflüssigen bzw. fehlenden Angaben.* (S. 49). Hildesheim Berlin: Franzbecker.

4.4.1. Schulbuchaufgaben verändern/öffnen

- Informationen weglassen (1);
- Übermaß an Informationen (2);
- kleinschrittige Anleitungen weglassen (3);
- reflexionsanregende Fragen anfügen (4);
- Aufgabenstellungen umkehren (5);
- Aufgaben stellen, in denen Fehler entdeckt und begründet werden müssen (6);
- Aufgaben von den Schülern selbst erfinden lassen zu vorgegebenen mathematischen Inhalten, Ausdrücken, Sachkontexten (7).

Beispiele zu:
(1)
Ich möchte meine Garage fliesen. Größe der Garage: L=4 m, B = 3,50 m, Preis der Fliesen: 35 €/m^2. Wie viel kostet es?

↓

Ich möchte meine Garage fliesen. Welches Budget muss ich einplanen?

(2) Klasse 5
Die Hausspinne lebt in ganz Europa. Die Weibchen besitzen eine Körperlänge (ohne Beine) von 13 – 15 mm, die Männchen erreichen nur 12 – 15 mm. Hinter Möbeln oder Gerümpel baut die Hausspinne ihr Trichternetz. Die Weibchen geben bisweilen ihr Netz auf, um neue Jagdgebiete zu erkunden, wenn das bisherige zu unergiebig geworden ist. Du entdeckst in deinem Haus, im Keller und auf dem Dachboden die Reste von 12 Spinnennetzen. Wie viele Spinnen könnten am Bau beteiligt gewesen sein?

(3) Erdgasaufgabe[14]
Die weltweiten Erdgasreserven wurden 2002 auf etwa 160 Billionen Kubikmeter geschätzt. Die jährliche Fördermenge betrug in etwa 2,5 Billionen Kubikmeter.

a) Bestimme für die Zuordnung *Zeit in Jahren seit 2002* → *Erdgasreserven in Kubikmeter* die Gleichung unter der Voraussetzung, dass sich die jährliche Fördermenge nicht ändert. Wie lange würden die geschätzten Erdgasreserven reichen

b) Wie lange reichen die Erdgasreserven, wenn die Produktion von heute an auf jährlich 2 Billionen Kubikmeter zurückgefahren würde?

↓

Die weltweiten Erdgasreserven wurden 2002 auf etwa 160 Billionen Kubikmeter geschätzt. Die Fördermenge betrug seitdem jährlich etwa 2,5 Billionen Kubikmeter. Berechne modellhaft unter unterschiedlichen Annahmen, wann die Erdgasreserven wohl aufgebraucht sein werden. Erläutere und begründe dein gesamtes Vorgehen ausführlich!

(4) Klasse 5
Was meinst du dazu?
In einem Zeitungsartikel wird angegeben, dass man pro Familie 26 000 l Wasser im Jahr sparen kann, wenn man den Wasserhahn beim Zähneputzen zudreht. Kann das sein? Begründe!

[14] Cukrowicz, J. & Zimmermann, B. (2000): *MatheNetz 8, Ausgabe N.* Braunschweig: Westermann.

(5)
Meine Schwester Nina hat 8 Bonbons und gibt mir 4 Bonbons. Wie viele Bonbons bleiben Nina nur noch übrig?
8 – 4 =
Erzähle eine Rechengeschichte.

(6) Klasse 5
Zeitumstellung: Am letzten Wochenende im März werden die Uhren auf Sommerzeit umgestellt.
„Super", ruft Meike, „da kann ich eine Stunde länger schlafen."
„Ja, das stimmt", meint Armin, „denn, wenn du um 8 Uhr aufstehst, ist es schon 9 Uhr." Was meinst du dazu?

(7)
- Erfinde ein Problem zu Dreisatz, Fläche, Operation, ...

4.4.2. Gegebenheiten aus dem Leben nutzen

Die ganze Welt um uns herum ist voll von Mathematik. Man muss nur mit offenen Augen durch die Welt gehen und lernen, mathematische Fragen zu stellen.

- Schulausflüge: Bus? Zug? Auto? - Fahrpläne lesen- Zeitmanagement – Preise berechnen -...
- Gestaltung des Schulhofes: Raumaufteilung – Planung – Material – Kosten – Einteilung der Arbeit - ...
- Schulfest: Planung – Preise und Kosten – Zeitmanagement – Essen - ...
- Sportprojekt: Preis – Anzahl Begleitpersonen – Gruppenaufteilung – Material - ...
- Urlaubsfotos: Abbilden von optischen Täuschungen – Größenverhältnisse - ...

4.4.3. Fermi-Aufgaben

1) Ein bisschen Geschichte Enrico Fermi
Der Name Fermi-Aufgabe geht zurück auf den italienischen Kernphysiker Enrico Fermi (1901-1954), der seinen Studenten an der Universität von Chicago z.B. die Frage stellte:

„Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?"[15]

Indem er solche Fragen stellte, wollte er seine Studenten dazu anregen, auf einem schnellen Weg mit nur wenigen Daten eine realistische Lösung durch begründete Schätzung sowie durch Anwendung einer effizienten Lösungsstrategie zu finden:

- Ungefähr 3 Millionen Leute leben in Chicago.
- Ungefähr zwei Personen leben durchschnittlich in einem Haushalt.
- Ungefähr in jedem zwanzigsten Haushalt gibt es ein Klavier, das regelmäßig gestimmt wird.
- Klaviere werden ungefähr einmal pro Jahr gestimmt.
- Es dauert etwa zwei Stunden, ein Klavier zu stimmen, inklusive Fahrzeit.
- Ein Klavierstimmer hat einen 8-Stunden-Tag, eine 5-Tage-Woche und arbeitet 40 Wochen pro Jahr. Daraus ergibt sich die Zahl der pro Jahr zu stimmenden Klaviere in Chicago:
    - (3.000.000 Einwohner) / (2 Personen pro Haushalt) × (1 Klavier/20 Haushalte) × (1 Mal Stimmen pro Klavier und Jahr) = 75.000 Mal muss in Chicago pro Jahr ein Klavier gestimmt werden.
- Ein Klavierstimmer kann folgende Arbeit bewältigen:
    - (40 Wochen pro Jahr) × (5 Tage pro Woche) × (8 Stunden pro Tag) / (2 Stunden pro Klavier) = 800 Klaviere kann ein Klavierstimmer pro Jahr stimmen.
- Demnach müsste es etwa 100 Klavierstimmer in Chicago geben.

[15] Wikipedia. (2015). *Fermi-Problem*. Verfügbar unter: http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem [16.03.2015]

2) Kennzeichen von Fermi-Aufgaben
Fermi-Probleme fordern in besonderer Weise Modellierungsprozesse heraus, weil zunächst keine Daten bekannt sind. Die Kinder müssen ihr Alltagswissen zusammentragen, Hypothesen zu realistischen Größen entwickeln, eigene Befunde darstellen und begründen, Vorgehensweisen und Ergebnisse anderer Kinder verstehen, miteinander vergleichen und kritisch bewerten. Bei solchen Aufgaben steht das Entwickeln prozessorientierter Kompetenzen im Vordergrund. Die Anforderungen an die Kinder sind daher besonders hoch.

Bemerkung: Bei Fermi-Aufgaben ist jedoch der kindnahe Realitätsbezug nicht immer gegeben.

Die Fermi-Aufgaben

- sind komplex,
- nicht direkt lösbar,
- enthalten keine oder sehr wenig numerische Angaben,
- werden durch Abschätzung und Überschlagsrechnung beantwortet.

Die methodische Schrittfolge bei Fermi-Aufgaben nach C. Skerra und M. Kamps[16] wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

Ohne Strukturierungshilfen würden Fermi-Aufgaben zu Überforderung und Misserfolgen führen. Deshalb haben die Autorinnen 5 Schritte zur Bearbeitung dieser Aufgaben entwickelt (siehe 4-Stufen-Lösungsplan), die sich besonders in Unter- und Mittelstufe bewährt haben.

1.Schritt: Verstehen und Vermuten
Einzelarbeit und Plenumsgespräch:
„Vermute deine Lösung und beantworte sie mit ja oder nein."

2.Schritt: Hilfsfragen
Bei Fermi-Aufgaben sind die Angaben unvollständig. Deshalb müssen zur Lösung Daten gesammelt und benutzt werden.
Dazu sind Hilfsfragen erforderlich.
„Welche Frage stellst du dir, damit du die Aufgabe lösen kannst?"

3.Schritt: Merkhilfen
Trainieren von Stützpunktwissen, z.B. Einsatz von 10-Minuten-Rechnen, Größen visualisieren.
„Schätze das Gewicht, die Länge oder die Anzahl. Die Merkhilfen unterstützen dich dabei."

📖 *Stützpunktwissen[17] kurz erklärt:*
Stützpunktwissen oder Stützpunktvorstellungen sind verinnerlichte Vergleichsgrößen, Repräsentanten der Erfahrungswelt der Kinder. Sie haben eine Schlüsselfunktion bei der Entwicklung von Größenvorstellungen; sie sind die Voraussetzung für das Schätzen in Alltagssituationen sowie für die Anwendung der Mathematik im Allgemeinen.

4.Schritt: Darstellen
Lösungen mit passender Rechnung nachvollziehbar darstellen.
„Stelle deine Lösung so dar, dass alle Kinder sie verstehen können. Du solltest Tabellen oder Skizzen mit Beschriftungen benutzen."

[16] Skerra, C. & Kamps, M. (2012). Besuch von Herrn Fermi. *Grundschule 10 – 2012*
[17] Kushmann, C. (2012). *Entwicklung von Längenvorstellungen im jahrgangsgemischten Unterricht durch Stützpunktwissen*. München: Grin.

5.Schritt: Antwort und Prüfung
Die Kinder fassen ihre Ergebnisse in einem Antwortsatz zusammen und beantworten die Frage:
„Kann das stimmen?"
„Schreibe deinen Antwortsatz auf. Vergleiche dein Ergebnis mit deiner Vermutung."

4.5. Wie lernen die Schüler modellieren?

4.5.1 Auswahl der Aufgaben

Zum Modellieren eines realen Problems sind viele verschiedene Kompetenzen erforderlich, da es sich um eine vielseitige Arbeit handelt. Um das Modellieren zu lernen, ist es erforderlich:
- einerseits geeignete Aufgaben auszusuchen und
- andererseits die Unterrichtskultur entsprechend zu gestalten.

Um das Modellieren komplexer Probleme zu lernen, sollten die Schüler und Schülerinnen:

- Aufgaben erarbeiten, die den gesamten Modellierungsprozess erfordern.
- Aufgaben lösen, die die einzelnen Teilschritte gezielt einüben: Grundlagenwissen und Aufarbeitung von Schwierigkeiten.
  Jedoch ist es nicht korrekt zu vermuten, dass zunächst die Teilschritte im Einzelnen erarbeitet werden müssen, bevor der gesamte Prozess ausgeführt werden kann.[18]
- Modellierungsprojekte durchführen:
  Wenn die Schüler genügend Erfahrungen im Modellieren gesammelt haben, können Modellierungsprojekte mit komplexen Fragestellungen entwickelt werden, die einen höheren Zeitbedarf erfordern.
  Bei diesen Aufgaben vertiefen die Schüler ihre Kenntnisse in behandelten Inhalten, vernetzen und wiederholen ihr gesamtes Wissen, da sie zunächst nachdenken müssen, was sie hier anwenden könnten.

4.5.2 Praktische Unterrichtsgestaltung

Der Einsatz von Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht soll dazu führen, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, selbstständig komplexe Probleme mit Mathematik zu lösen. Die Unterrichtsmethode sollte daher darauf angelegt sein, die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler und das eigenständige Denken zu fördern. Nun stellt sich die Frage, wie dies konkret im Unterricht umgesetzt werden kann.

a) Einstiegssituation

Die Schüler erhalten die nötigen Informationen zur realen Situation in Form
- von kurzen Aufgabenstellungen,
- von Informationstexten,
- von Filmen,
- von Gegenständen,
- von Tonmaterialien,
- eines Besuches vor Ort,
- eines Lehrervortrags oder Ähnlichem.

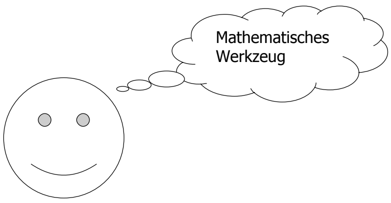
[18] BlomhØj, M. & Jensen, H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, 22 (3).

Dabei ist es wichtig, den Schülern genügend Zeit zu geben, sich selbst mit der realen Situation und Fragestellung auseinanderzusetzen.

Sachproblem $\xrightarrow{\text{Verstehen}}$ Situationsmodell

Um das **Sachproblem** in ein **Situationsproblem** übertragen zu können, sind folgende Bearbeitungshinweise[19] hilfreich:

- Texte erschließen und wiedergeben;
- Bilder deuten, Graphiken interpretieren;
- Textstellen markieren/wegstreichen;
- Fragen zur Sachaufgabe stellen;
- Sachverhalte szenisch darstellen;
- Sachverhalte zeichnerisch darstellen;
- fehlende Angaben im Text sinnvoll ergänzen;
- ...



Bei dieser Schlüsselbrettaufgabe aus dem Themenheft Mathematik „Modellieren" müssen die Kinder einen Text erschließen, ein Bild deuten und Fragen klären.[20]

Monika bastelt für den Muttertag ein Schlüsselbrett. Ihr Brett ist 60 cm lang.

Sie will zum Aufhängen der Schlüssel 5 Nägel darauf befestigen.

Die Abstände vom Rand zum Nagel und zwischen den Nägeln sollen gleich groß sein.

Abb. 5: Schlüsselbrett

[19] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"*, (S. 38). Graz: Leykam.

[20] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"*, (S. 11). Graz: Leykam.

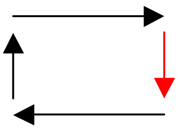
Die Auseinandersetzung mit der Aufgabenstellung kann in Einzelarbeit, Partnerarbeit, Gruppenarbeit oder im Plenum erfolgen. Die Sozialform sollte so gewählt werden, dass sie der Gruppe angepasst ist und möglichst jedem Schüler ein selbstständiges Arbeiten ermöglicht.
Dabei geben Gruppenarbeiten und Partnerarbeiten auch den schwächeren Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit, aktiv und angstfrei zu arbeiten. Die Einteilung der Gruppen in leistungsheterogene Gruppen fördert die Unterstützung der leistungsschwächeren durch die leistungsstärkeren Kinder. Eine Einteilung in leistungshomogene Gruppen ermöglicht es jeder Gruppe entsprechend ihres Leistungsvermögens Lösungen zu entwickeln.

Beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben haben sich leistungshomogene Gruppen mit 2 – 3 Kindern als sehr produktiv erwiesen, weil sie zielorientiert, strukturiert und intensiv vorgehen.

b) Lösungsansätze finden

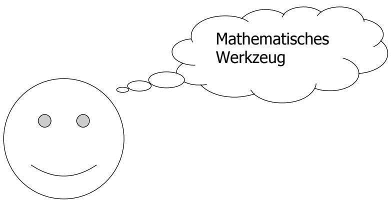
Ist das Problem erfasst, müssen Lösungsansätze gefunden werden. Dies kann zunächst alleine, mit dem Tischnachbarn oder im Plenum geschehen. Zunächst sollte den Schülern Zeit gegeben werden ihre Ideen aufzuschreiben, dann mit ihrem Nachbarn zu besprechen, um sie danach in der Klassengemeinschaft zu diskutieren. Dabei ist es wichtig, dass der Lehrer sich zurückhält, die Ideen sammelt, zusammenfasst und die Diskussion als Moderator neu anstößt. Die erste Besprechung mit dem Partner stellt sicher, dass auch die schwächeren Schüler an der Zusammenlegung der Ideen im Plenum beteiligt sind und nicht nur die stärkeren Kinder.

Situationsmodell $\xrightarrow{\text{Mathematisieren}}$ Mathematisches Modell



Lösungsansätze, die helfen, das **Situationsmodell** in ein **mathematisches Modell** umzuwandeln, sind konkret zu finden durch[21]:

• Skizzen/Diagramme anfertigen (Verständnis des mathematischen Modells);
• Tabellen erstellen;
• Daten erheben;
• passende Rechenoperationen finden;
• Erstellung einer geometrischen Zeichnung;
• Sachaufgabe und Rechnungen einander zuordnen;
• Gemeinsamkeiten /Unterschiede verschiedener Sachaufgaben herausfinden;
• Erfinden von strukturgleichen Aufgaben, ...



Beim Beispiel des Schlüsselbretts ergeben sich *konkret* Lösungsansätze durch:
- das Zeichnen eines Schlüsselbretts;
- die Auswahl von konkretem Material für die Herstellung des Schlüsselbretts, die praktische Herstellung eines Schlüsselbretts unter Berücksichtigung der richtigen Abmessungen;
- die Ausführung erster Operationen für die Bemessung.

[21] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"*, (S.38). Graz: Leykam.

An diesem Beispiel wird sichtbar, dass Modellierungsaufgaben viele verschiedene Kompetenzen fördern:
- Erschließen der realen Welt (Alltagsproblem);
- das praktische Lösen (Sägen des Bretts);
- das Messen;
- das zeichnerische Lösen.

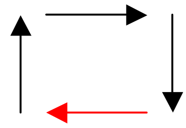
Bereits in dieser Phase beginnt eine erste konstruktive Auseinandersetzung mit Fehlern (siehe Abschnitt 4.5.3).

c) Lösungsansätze bearbeiten

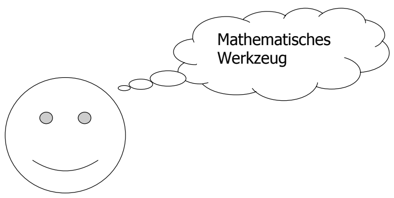
Haben die Schüler eine Idee entwickelt, mit der sie einen Weg zur Lösung erhalten können, werden die zugehörigen mathematischen Tätigkeiten durchgeführt.

Innermathematisch lösen

Mathematisches Modell → Lösung

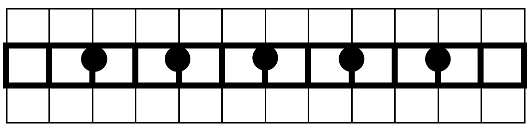


Die Kinder haben also ein **mathematisches Modell** erstellt und streben die **mathematische Lösung** an, diese kann beispielsweise unterstützt werden durch[22]: • Schätzen des Ergebnisses; • schriftliche Rechenverfahren; • Benutzung geometrischer Hilfsmittel; • Durchführung/Vergleich mit einer Überschlagsrechnung; • Durchführung der Rechenoperationen allenfalls mit Probe; • …



Bei der Schlüsselbrettaufgabe haben Kinder folgende mathematische Lösungen entwickelt:
- Rechensatz
  Abstände zwischen den 5 Nägeln: 60 cm : 6 = 10 cm

- Zeichnung:



- Konkrete Umsetzung: Schlüsselbrett basteln

d) Ergebnissicherung

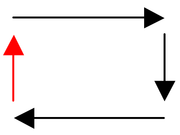
Angesichts der Vielzahl an möglichen Lösungswegen und Lösungen, die gesichert werden müssen, kann dies nicht durch einen von der Lehrperson formulierten Merksatz geschehen.
Es sollte aber darauf Wert gelegt werden, eine angemessene Präsentation zu realisieren.

[22] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , (S. 38). Graz: Leykam.

Interpretieren

Lösung → Sachproblem

Validieren



Im letzten Schritt müssen die Schüler noch ihre **Lösungen** auf das **Sachproblem** zurückführen. Die Übertragung umfasst zwei Schritte, die ineinander greifen[23]:

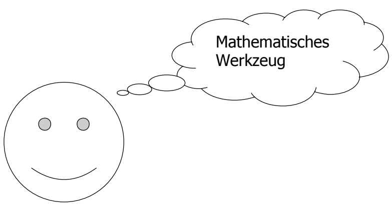
1) Die Interpretation:
- die Lösung wird auf die Anfangssituation zurückgeführt und hinterfragt;
- die Antworten werden auf die Anfangsfrage bezogen (z.B. Plausibilität, sprachlicher Kontext);
- Lösungswege werden verglichen;
- …

2) Die Validierung:
- die Antworten werden in Bezug auf ihre Plausibilität überprüft (Validierungsgespräch);
- mit fehlerhaften Antworten wird konstruktiv gearbeitet (siehe Umgang mit Fehlern 4.5.3).

Der Modellierungsprozess wird abschließend reflektiert, um aus den Schwierigkeiten Konsequenzen zu ziehen und bei der nächsten Modellierungsaufgabe aus den Fehlern zu lernen (siehe Metakognition 4.5.4).

Die Auswahl der Art der Präsentation wird abhängig sein von den Vorkenntnissen der Kinder und daher unterschiedlich in den verschiedenen Schulstufen sowie Klassen.

Die folgende Auflistung gibt Anregungen für mögliche Präsentationen:
Präsentationen der Ergebnisse der Gruppenarbeiten, Erstellen einer Wandzeitung, Anfertigen von Dokumentationsmappen, Anfertigen von Protokollen, Anfertigen von Lerntagebüchern, ...



Bezogen auf das Beispiel des Schlüsselbretts werden die verschiedenen entwickelten mathematischen Modelle und die Lösungen vorgestellt und im Plenum verglichen.
Im Validierungsgespräch werden sowohl die zielführenden als auch die womöglich „falschen" Lösungen diskutiert.
Ein möglicher Fehler beim Modellierungsprozess der Schüsselbrett-Aufgabe ist beispielsweise, dass ein Kind schreibt, dass die Abstände 10 m lang sind. Entsprechend der gewählten Ergebnissicherung wird mit diesem Kind oder mit der gesamten Klasse das Validierungsgespräch geführt.[24]

[23] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , (S.38). Graz: Leykam.
[24] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , (S. 15). Graz: Leykam.

Lehrerin: Lies bitte deine Antwort noch einmal.
Lena: Die Abstände sind 10 m lang.
Lehrerin: Kann das sein?
Lena: Oh, ein 10 m langes Schlüsselbrett ist vielleicht doch etwas zu groß.
Lehrerin: Aber du hast ja geschrieben, dass die Abstände 10 m lang sind, dann wäre ja dann das Schlüsselbrett viel länger. Weißt du, wie lang es dann wäre?
Lena: Ja, 6 mal 10 m ist gleich 60 m – äh, es sind ja cm angegeben. Ich verbessere die Antwort.

4.5.3 Konstruktiver Umgang mit Fehlern

Wer sich selbstständig mit Problemen auseinandersetzt, macht notwendigerweise Fehler. Diese sollten dazu genutzt werden, neue Impulse zur Weiterentwicklung zu geben.

Methodische Hinweise:

Folgende Vorgehensweisen können helfen, einen positiven Umgang mit Fehlern zu fördern:
- Unangemessene Lösungswege sollten nie durch das Wort "falsch" disqualifiziert, sondern genau wie die geeigneten Lösungen im Plenum diskutiert werden.
- Jede Idee, jede Frage ist ein Beitrag auf dem Weg zur Lösung und somit besser als gar kein Beitrag. Dies sollte den Lernenden durchaus offensiv verdeutlich werden.
- Schüler, die über einen Irrweg zur Lösung gefunden haben, sollten bei der Präsentation den gesamten Lösungsprozess darstellen.

Der konstruktive Umgang mit Fehlern und Wissenslücken erfordert die Kompetenz, auf einer Metaebene über das eigene Vorgehen nachzudenken. Dies führt zum selbstregulierten Lernen.[25]

4.5.4 Metakognition

Mit Metakognition bezeichnet man das Denken über das eigene Denken und die Steuerung des eigenen Denkens[26]. In Folge der Pisa Studien wurde der Begriff des selbstregulierten Lernens in diesem Sinne eingebürgert. Darunter wird die Handlungskompetenz der Lernenden verstanden, sich selbstständig Lernziele zu setzen, dem Inhalt und dem Ziel angemessene Techniken auszuwählen und gegebenenfalls zu korrigieren sowie das eigene Vorgehen zu bewerten.

Wie kann man dies im Unterricht erreichen?
Für die Lehrer ist es meist einfach, doch Schüler müssen selbstreguliertes Lernen einüben.

Folgende Schritte sollten den Schülern im Laufe der Zeit helfen: [27]

- Zunächst versuche ich das Problem zu verstehen. Dazu muss ich eventuell zusätzliche Informationen einholen.
- Anschließend vereinfache ich das Problem, damit ich es mit mathematischen Methoden lösen kann. Dabei ist es wichtig, darauf zu achten, dass ein sinnvoller Bezug zur Realität erhalten

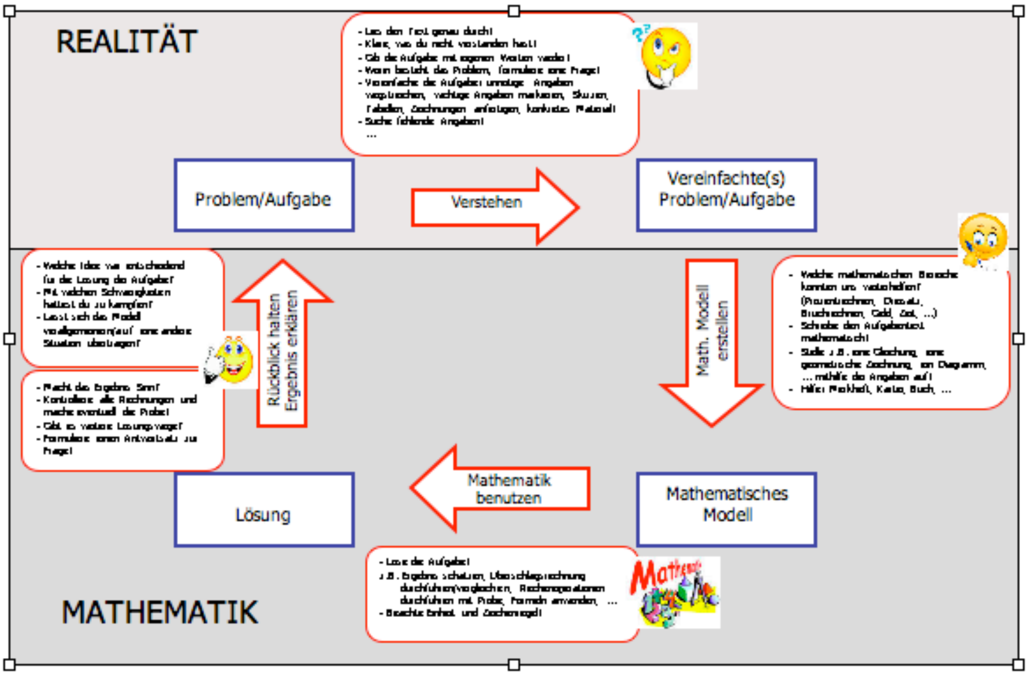
[25] Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, N., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K-J., Weiß, M. (2001). *Pisa 2000, Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.
[26] Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematikdidaktik*, 24 (1), 18 – 40.
[27] Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren*. Berlin: Cornelsen.

bleibt.
- Wenn ich eine (mathematische) Lösung gefunden habe, muss ich überlegen, was sie in der Realität bedeutet. Ich prüfe, ob sie sinnvoll ist. Wenn ich keine Lösung finden kann, muss ich möglicherweise andere Vereinfachungen vornehmen.

Weiterhin ist es wichtig, dass im Unterricht die Lösungen und Vorstellungen der Schüler und Schülerinnen produktiv, sachlich und nicht wertend diskutiert werden. Außerdem ist es förderlich, die Schüler und Schülerinnen immer wieder aufzufordern, ihr Vorgehen zu reflektieren und der Klasse auch „Irrwege“ bei der Präsentation ihrer Lösung vorzustellen.

Hilfen können dabei beispielsweise folgende Diagramme beziehungsweise Karten darstellen, die mit den Schülern entwickelt werden.

Der Modellierungsweg



Arbeitsvorlage „Der Modellierungsweg“ im Anhang 1.

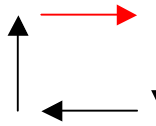
Dabei gilt es, den Lernenden Zeit zu geben und am Anfang nicht zu viel zu verlangen, da auch der Weg ein Teil des Ziels ist! Es braucht Zeit Modellieren zu lernen.
Trotz guter Unterrichtsgestaltung werden Schwierigkeiten auftauchen, die Hilfestellungen seitens der Lehrpersonen bedürfen.

4.5.5 Hilfestellungen

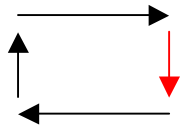
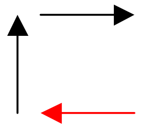
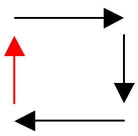
Die Lehrperson muss sich soweit wie möglich zurückhalten und nach dem *Prinzip der minimalen Hilfen* arbeiten. Es gilt der Leitsatz: „So viel wie nötig, aber so wenig wie möglich."
Hilfestellungen können Motivationshilfen, Rückmeldungshilfen, allgemeinstrategische Hilfen, inhaltlich strategische Hilfen sein.
Da der Einsatz massiver Hilfen zu schnell zu geschlossenen Aufgaben führt, sollten die Hilfen wohl dosiert sein. Zur Förderung des selbstständigen Lernens sollten lieber einfachere Schülerlösungen akzeptiert werden, als durch zu viel gegebene Hilfen zur Wunschlösung zu drängen. Die spätere Lösungsbesprechung wird auch den Schülern, die selbst einfache Lösungswege entwickelt haben, einen Einblick in die komplexeren Lösungen geben.
Im Laufe der Zeit wird man feststellen, dass bei einigen Schülern immer wieder dieselben Schwierigkeiten beziehungsweise Fehler in den gleichen Schritten auftauchen. Daher ist es wichtig, beim Rückblick auf der Metaebene diese Schwierigkeiten zu thematisieren.

Beispielaufgaben für die verschiedenen Stufen
Unterstufe:
Modellierungsaufgabe: Mein Schulweg[28]

Die Ausgangssituation ist die Mobilitätswoche. Es geht darum, die Schüler und Eltern für einen umweltbewussten und gesunden Schulweg zu sensibilisieren.
Zu Beginn der Aktion soll festgestellt werden, wie die Schüler zur Schule kommen.

 Sachproblem Situationsmodell	„Auf welche Art kommt ihr derzeit zur Schule?" Die Art, wie jeder Schüler zur Schule kommt, wird bestimmt und durch kleine Bilder dokumentiert. Jeder wählt das entsprechende Bild aus und legt es in einen Sammelkorb. Es entsteht eine Sammlung ungeordneter qualitativer Daten (Themenheft „Stochastik" – Fachgruppe Mathematik). Doch haben wir so noch keinen Überblick und können nicht bestimmen, wie viele Kinder welches Fortbewegungsmittel benutzen. Deshalb sollen diese Daten nun geordnet und klassifiziert werden. Die Kinder werden gefragt: „Können wir auf einen Blick erkennen, wie ihr zur Schule kommt? Wie können wir uns einen besseren Überblick verschaffen?" Die Kinder sollen in Gruppen überlegen, wie sie die Situation strukturiert darstellen. Zum Verständnis und zur Vereinfachung der Aufgabe steht neben dem Korb mit den Bildern weiteres konkretes Material zur Verfügung: Klötzchen, Legosteine, Perlen, ...

[28] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , (S.60). Graz: Leykam .

	Danach werden die verschiedenen Darstellungen der Gruppen im Plenum präsentiert. Jede Gruppe beschreibt ihre Vorgehensweise und das Ergebnis. Es wird wiederum die Frage gestellt: „Kann man anhand der Darstellungen auf einen Blick erkennen, welche Kinder mit dem Bus, zu Fuß oder mit dem Auto zur Schule kommen?" Dieser Austausch führt zur Beurteilung der unterschiedlichen Darstellungen („Welche Darstellung(en) eignet/eignen sich am besten, um die Frage zu beantworten?") und ermöglicht erste Interpretationen. Ggf. wird das Situationsmodell überarbeitet, falls die gewählte Darstellung nicht deutlich genug ist.
 Situationsmodell ↓ Mathematisches Modell  Mathematisches Modell ↓ Lösung	Wie können die Schüler diese konkreten Darstellungen auf Papier übertragen? 1) Die Kinder arbeiten in Gruppen. Unterschiedliche Papierformate (Plakat, Heft, kariertes Papier, ...) stehen zur Verfügung. Sie wählen selbstständig das Papierformat und die Darstellungsform (Balken, Säule, ...) aus. Die Schüler präsentieren ihre Arbeitsergebnisse; die geeigneten Darstellungen werden ausgewählt. 2) Hinführung zum mathematischen Modell, das allgemeingültig ist: Stabdiagramm, Säulendiagramm, Balkendiagramm. Die Schüler nutzen das Balken-, Säulen-, Stabdiagramm und übertragen es in ihr Heft. Die Diagramme werden gedeutet und mit Zahlen/Symbolen/Wörtern beschriftet. „Wie viele Schüler kommen mit dem Auto zur Schule?" „Wie viele Kinder kommen mit dem Bus?" „Wie kommen die meisten/wenigsten zur Schule?" ... Anhand des Diagramms wird bestimmt, wie viele Kinder mit dem Auto, dem Bus, ...zur Schule kommen. Wir schreiben das Ergebnis auf.
 Mathematisches Modell ↓ Sachproblem	Sind die Teilergebnisse korrekt? Finden wir die Gesamtanzahl wieder? (Probe) Ist das Diagramm übersichtlich? Weshalb ist eine einheitliche Darstellung so wichtig? Haben wir unsere Ausgangsfrage beantwortet? Ergebnissicherung Evt. Transfer (erweiterte Aufgabe)

Mittelstufe:
Modellierungsaufgabe: Im Restaurant[29]
Die Ausgangssituation ist ein geplanter Restaurantbesuch einer vierköpfigen Familie. Es geht darum, mit dem zur Verfügung stehenden Geld die Wünsche eines jeden Familienmitglieds zu berücksichtigen.

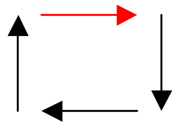
Ausschnitt aus der Speisekarte:

Speisekarte
Vorspeisen
Tagessuppe 5,55 €
Käsekroketten 6,50 €

Hauptgerichte vegetarisch
Gemüselasagne 5,80 €
Salatteller 6,70 €
Spagetti mit Tomatensoße 6,95 €
Kinderpizza mit Tomaten und Käse 4,60 €
Pizza mit Gemüse und Käse 7,80 €
Gemüseeintopf scharf mit Brot 8,50 €

Fleischgerichte
2 Frikadellen mit Kartoffelsalat 6,50 €
Wiener Schnitzel mit Fritten und Salat 8,80 €
Schweinebraten mit Bratkartoffeln und Salat 9,90 €
Steak mit Fritten und Salat 9,90 €
Würzige Fleischspieße mit Kartoffeln 9,95 €

Getränke
Bier (0,3 l) 2,35 €
Cola (0,3 l) 2,50 €
Apfelsaft (0,3 l) 2,40 €
Mineralwasser (0,3 l) 1,70 €

 Sachproblem ↓ Situationsmodell	Die Kinder sitzen im Kreis, die Lehrperson erklärt die Ausgangssituation und gibt den Arbeitsauftrag: Papa hat Mama, Oma und die Kinder Klara und Peter in ein Restaurant eingeladen. Im Lokal merkt Papa, dass er noch genau 61 Euro in der Geldbörse hat. Als sie die Speisekarte durchsehen, meint er: „Also 1 Euro Trinkgeld bekommt die Kellnerin. Was können wir nun aussuchen?“ Oma sagt: „Denkt daran, ich bin Vegetarierin!“ Die Mutter möchte ein Fleischgericht essen. Peter hat einen Bärenhunger. Er möchte unbedingt eine Vorspeise und ein Hauptgericht. Klara liebt Kinderpizza. Jeder nimmt ein Getränk. „Wie können die Menü-Wünsche eines jeden Familienmitglieds berücksichtigt werden?“ Erstelle eine Bestellliste für Getränke und Speisen! Beachte dabei den Betrag von 61 €! Gestalte dazu ein Plakat!

[29] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren“*, Graz: Leykam.

	Die Kinder bekommen diesen Ausschnitt aus der Speisekarte und geben die Aufgabe mit eigenen Worten wieder. Sie vereinfachen und präzisieren die Aufgabe durch Klärung aller Fragen und Bemerkungen der Kinder.
Situationsmodell Mathematisches Modell Mathematisches Modell Lösung	Die Kinder finden sich in Dreier-Gruppen zusammen und bearbeiten die Thematik. Jedes Kind der Gruppe erhält ein Din-A3 (kariertes) Blatt, auf dem es seine Rechenwege ausführlich aufschreibt, sodass die Ergebnisse anschließend der Klasse vorgestellt werden können. Die Kinder treffen im Rahmen der vorgegebenen Einschränkungen ihre Auswahl, fällen Entscheidungen und rechnen in vielfältiger Weise mit den Geldbeträgen. Die Kinder formulieren Rechensätze und lösen sie. Anschließend präsentiert jede Gruppe ihre Lösungen der Klasse. Alternative: Vor der Präsentation tauschen die Gruppen die Lösungsblätter aus und versuchen die Lösungswege der anderen nachzuvollziehen.
Mathematisches Modell Sachproblem	Die Kinder präsentieren ihre Arbeitsergebnisse im Plenum. So wird die Verschiedenheit der Ergebnisse sichtbar. Die Diskussion über die verschiedenen Vorgehensweisen und Strategien wird von der Lehrerin geleitet. Mit allen wird überprüft: Sind die Teilergebnisse korrekt? Sind die Gleichungen korrekt aufgestellt? Wurden die Einschränkungen berücksichtigt? Kann die Ausgangsfrage beantwortet werden: Reicht das Geld? Welche unterschiedlichen Vorgehensweisen/Strategien sind möglich? Welche Kombinationen in der Menü-Auswahl sind möglich? Sind die Präsentation und Rechenwege übersichtlich dargestellt? Nach den Fragen wird ein Fazit mit den Kindern gezogen. Erweiterte Aufgabe: Im Restaurant muss es schnell gehen: Welche Rechenwege erweisen sich dann als günstig (Überschlagsrechnung in Verbindung mit Auf- und Abrunden)? Transfer: Die Aufgabe wird auf einen anderen Bereich übertragen: Taschengeldverwaltung, Einkauf, …

Weitere Ideen:

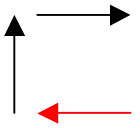
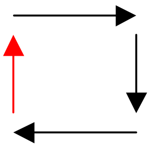
Organisation eines Frühstücks;
Bestimmung der Kerzengröße für einen Adventskranz;
Erstellung eines Fußballplans: Welches Schuljahr darf den Fußballplatz des Schulhofes wann nutzen?
Die Klasse muss zum Schulbeginn neu eingerichtet werden: Wie könnte dies optimal geschehen?

Oberstufe:

Modellierungsaufgabe: Tanken

Frau Piep wohnt in Sankt-Vith nahe der luxemburgischen Grenze (Weiswampach). Sie fährt mit ihrem VW Golf zum Tanken nach Luxemburg, wo sich direkt hinter der Grenze eine Tankstelle befindet. Dort kostet der Liter Benzin nur 1,20 Euro (aktualisieren), im Gegensatz zu 1,35 Euro in Sankt-Vith.
Lohnt sich diese Fahrt für Frau Piep?

Sachproblem ↓ Situationsmodell	„Lohnt sich diese Fahrt für Frau Piep? “ Zunächst lesen die Kinder in Einzelarbeit die Problemstellung. Danach tauschen sich die Kinder in Partnerarbeit aus und versuchen die Fragestellung zu präzisieren, d.h. Was beinhaltet diese Frage? Anschließend werden die Vorschläge zur Klärung der Frage im Plenum besprochen. Dabei werden auch inhaltliche Fragen zum Sachproblem geklärt. Welche Angaben brauchen wir, um die Aufgabe zu lösen? - die Entfernung Sankt-Vith nach Weiswampach hin und zurück; - den Durchschnittsverbrauch des VW Golf (je nach Modell); - die Preisangaben des Benzins; - die Tankgröße des VW Golf (mit Mindestnachfüllmenge). Eine Situationsskizze wird angefertigt.
Situationsmodell ↓ Mathematisches Modell	Welcher mathematische Bereich kann uns bei dieser Problemstellung weiterhelfen? Evtl. Dreisätze mit Rechensätzen, der Zusammenhang zwischen Verbrauch und Preis. Falls das Stützpunktwissen *Dreisatz* nicht vorhanden ist, kann es zu diesem Zeitpunkt erarbeitet werden.

 Mathematisches Modell Lösung	Die Kinder werden aufgefordert, in Kleingruppen die Aufgabe mathematisch zu lösen und das mathematische Ergebnis aufzuschreiben (zu beachten sind dabei die Einheiten, Rechenregeln).
 Mathematisches Modell Sachproblem	Jede Gruppe stellt ihre Ergebnisse vor. Sind die Teilergebnisse korrekt? Gibt es verschiedene Lösungswege? Welche Lösungswege sind effizient? Haben wir unsere Ausgangsfrage beantwortet? Erweiterte Aufgabe: - von einem anderen Wohnort aus, - mit einem anderen Verbrauch, - mit anderen Kraftstoffen (Diesel, Autogas, ...), - mit anderen Kraftstoffpreisen berechnen. Transfer: Den Dreisatz auf andere Alltagsituationen anwenden.

Weitere Ideen:

Organisation der Finanzierung der Schneeklasse:

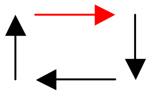
- Was könnte man machen, um Geld zu sammeln? Wie viel Mal könnte man die Aktivität machen?
- Was eignet sich am besten für einen Verkauf?
- Wird der Gewinn am Ende geteilt oder kann jeder Schüler seinen Verkaufsverdienst behalten?
- …

5. Bearbeitung von Teilkompetenzen des Modellierens

Damit die Schüler das Modellieren lernen, müssen sie sowohl Aufgaben bearbeiten, die das Durchlaufen ganzer Modellierungsprozesse fördern als auch solche, die Teilkompetenzen fördern. Das Zerlegen in Teilaufgaben erleichtert dem Kind den Einblick in Sachzusammenhänge und in die Verlaufsstruktur.

An dieser Stelle möchten wir nur die mathematisch relevanten Teilkompetenzen (Bilden eines Modells, Arbeit mit dem mathematischen Modell, Interpretieren, Validieren) beispielhaft darstellen.
Die andere Teilkompetenz (vom Sachmodell zum Situationsmodell) wird nur stichpunktartig erläutert.
Die Kernkompetenz *Argumentieren* sowie das *Reflektieren auf einer Metaebene* (siehe 4.5.4) werden nicht gesondert thematisiert, da sie bei der Bearbeitung aller Aufgaben benötigt werden.

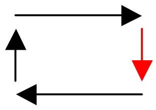
5.1. Vom Sachmodell zum Situationsmodell



Grundvoraussetzung für ein erfolgreiches Modellieren sind sprachbezogene Vorabklärungen, die sich auf Wortschatz und Textverständnis beziehen.
Diese Techniken sollten auch fächerübergreifend geübt werden.

- Texte erschließen und wiedergeben;
- Bilder deuten;
- Graphiken interpretieren;
- Textstellen markieren/wegstreichen;
- Fragen zur Sachaufgabe stellen;
- Sachverhalte szenisch darstellen;
- Sachverhalte zeichnerisch darstellen;
- fehlende Angaben im Text sinnvoll ergänzen;
- ...

5.2. Vom Situationsmodell zum mathematischen Modell



Möchte man das Bilden eines Modells trainieren, so bedeutet dies, dass man den Schülern eine Problemsituation vorlegen muss, die modelliert werden soll. Aufgabe der Schüler ist dann nicht nur das Lösen des Problems, sondern auch das Aufstellen des Modells. Das heißt, man unterbricht die Bearbeitung des Problems quasi mittendrin. Das ist im Prinzip bei jeder Modellierungsaufgabe möglich und soll hier nur beispielhaft an einigen Aufgaben dargestellt werden.
Das Abbrechen der Problembearbeitung nach dem Bilden des Modells ist jedoch für die Schüler oftmals unbefriedigend. Um das Bilden des Modells zu üben, ist es auch denkbar, die Schüler zunächst Modelle entwickeln zu lassen, diese anschließend zu besprechen und zu vergleichen und danach mit der Bearbeitung des Problems auf der Basis eines gemeinsam ausgewählten Modells fortzufahren.

- Gemeinsamkeiten/Unterschiede verschiedener Sachaufgaben herausfinden;
- Erfinden von strukturgleichen Aufgaben;
- Daten erheben (z.B. Zählen, Messen);
- Skizzen/Diagramme anfertigen (Verständnis des mathematischen Modells);
- Tabellen erstellen;
- Annahmen treffen;
- passende Rechenoperationen finden;
- Sachaufgaben und Rechnungen einander zuordnen;
- ...

5.2.1 Beispiel für Gemeinsamkeiten/Unterschiede verschiedener Sachaufgabe herausfinden

Durch das bewusste Vergleichen verschiedener Texte sollen die Schüler erkennen und verbalisieren, welche mathematischen Strukturen gleich sind und die entsprechenden Aufgaben einander zuordnen.

Beispiel 1: Unterstufe/Mittelstufe[30]

Zu jeder dieser Aufgaben gibt es eine weitere Aufgabe, zu der die gleiche Rechnung passt.
Male immer die zwei Aufgaben mit der gleichen Rechnung mit der gleichen Farbe an.

Lisa hat 129 €, Lena hat 57 €.
Um wie viel € hat Lisa mehr als Lena?

Lisa hat von ihrem Sparbuch 57 € abgehoben und ein Geschenk für ihre Mutter gekauft. Jetzt sind nur mehr 129 € auf dem Sparbuch. Wie viel € waren es vorher?

Auf Parkplatz A stehen 129 Autos, auf Parkplatz B um 57 mehr.
Wie viele Autos stehen auf Parkplatz B?

Auf Parkplatz A stehen 192 Autos, das sind um 75 weniger als auf Parkplatz B.
Wie viele Autos stehen auf Parkplatz B?

Am Samstag waren 192 Kinder im Schwimmbad, das sind um 75 mehr als am Sonntag. Wie viele Kinder waren am Sonntag im Schwimmbad?

Lisa hat 192 €. Dann gibt Oma Ilse ihr 75 €. Wie viel € hat Lisa nun?

Auf Parkplatz A stehen 57 Autos. Auf Parkplatz A und Parkplatz B zusammen stehen 129 Autos.
Wie viele Autos stehen auf Parkplatz B?

Lisa hat 192 €, Lena hat 75 €.
Um wie viel € hat Lena weniger als Lisa?

Abb. 62: Vergleichen von Texten

Beispiel 2: Oberstufe

Welche Aufgaben können mithilfe eines Dreisatzes gelöst werden und welche nicht?
Welche Aufgaben lassen sich mithilfe eines direkten Dreisatzes oder eines umgekehrten lösen?

5.2.2 Daten erheben (z.B. Zählen, Messen)

Aufgaben zur Datenerhebung: siehe Themenheft Stochastik

5.2.3 Diagramme/Skizzen erstellen

Skizzen helfen, die mathematische Struktur zu erkennen.

30 BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , (S. 46). Graz: Leykam.

Beispiel 1: Mittelstufe[31]

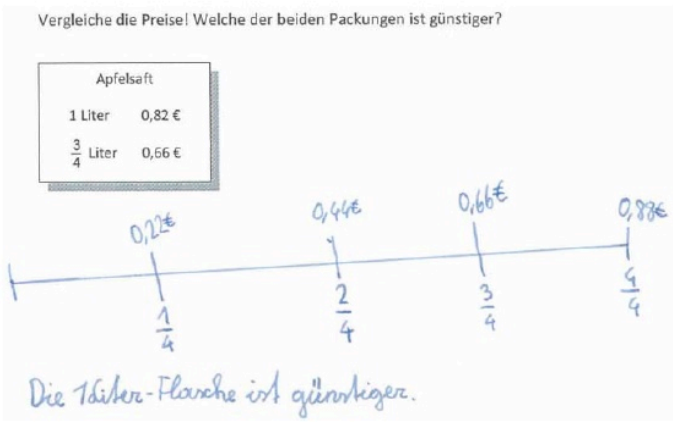


Abb. 66: Preise vergleichen (Anja, 4. Schulstufe)

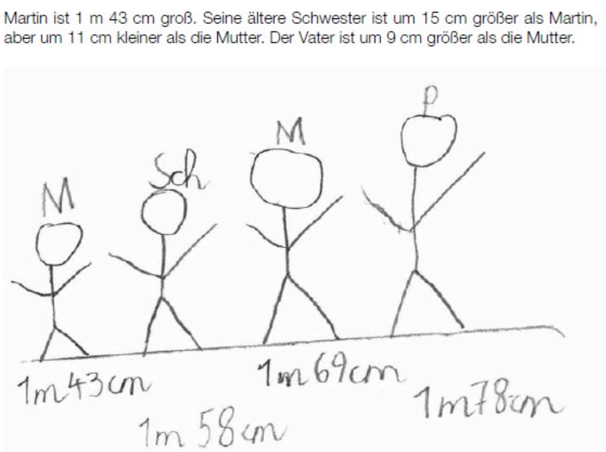


Abb. 67: Größenvergleiche (Niklas, 4. Schulstufe)

Hier bietet es sich an die Lösungsskizzen der Kinder zu vergleichen, um ein allgemeingültiges Modell zu entwickeln.

5.2.4 Tabellen erstellen

Tabellen dienen dem übersichtlichen Darstellen der Daten aus einem Sachkontext.
Sie bilden grundsätzlich eine Brücke zwischen Situationsmodell und mathematischem Modell.
Manchmal kann sogar die Lösung unmittelbar aus der Tabelle abgelesen werden.

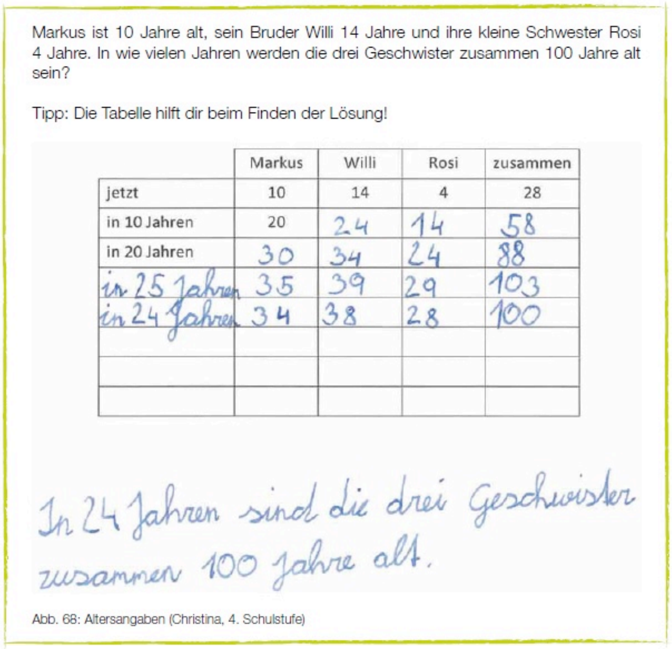
Tabellen ermöglichen die Lösungsfindung und –darstellung, indem die Rechnung bzw. das Ergebnis bei entsprechender Anordnung ohne nochmaliges Aufschreiben direkt in die Tabelle eingetragen wird.

Im folgenden Beispiel kann die Lösung durch systematisches Probieren gefunden werden.

---

31 BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren“* , (S. 49). Graz: Leykam.

Beispiel[32]:



Markus ist 10 Jahre alt, sein Bruder Willi 14 Jahre und ihre kleine Schwester Rosi 4 Jahre. In wie vielen Jahren werden die drei Geschwister zusammen 100 Jahre alt sein?

Tipp: Die Tabelle hilft dir beim Finden der Lösung!

	Markus	Willi	Rosi	zusammen
jetzt	10	14	4	28
in 10 Jahren	20	24	14	58
in 20 Jahren	30	34	24	88
in 25 Jahren	35	39	29	103
in 24 Jahren	34	38	28	100

In 24 Jahren sind die drei Geschwister zusammen 100 Jahre alt.

Abb. 68: Altersangaben (Christina, 4. Schulstufe)

Tabellen helfen auch im Umgang mit proportionalen Zuordnungen, wie z.B. beim Zusammenhang

- zwischen Stückzahl und Größe z.B. Stückzahl → Gewicht (kg), Stückzahl → Preis (Euro)
- zwischen zwei Größen z.B. Gewicht → Preis (Euro), Länge (m) → Preis (Euro)

Des Weiteren helfen Tabellen durch das geordnete Anschreiben und die dadurch sichtbare Struktur, Rechenoperationen abzuleiten[33].

5.2.5 Annahmen treffen

Beispiel: Grundidee „Pendler"[34]
Paul Hansen wohnt mit seinen Eltern, seinen Geschwistern und Großeltern in Eupen. In zwei Monaten tritt der Vater eine neue Arbeitsstelle in Köln an. Er muss dann jeden Tag von Eupen nach Köln pendeln. Diese Fahrten sind nicht nur anstrengend, sie kosten auch viel Geld. Wie viel Geld muss die Familie Hansen pro Jahr für die Fahrten ausgeben? Entwickle ein geeignetes Modell.

Modell 1: Der Vater fährt mit dem Auto nach Köln.
Modell 2: Der Vater fährt mit dem Auto nach Aachen und nimmt dann den Zug nach Köln.
Modell 3: Der Vater fährt mit dem Bus nach Aachen und nimmt dann den Zug nach Köln.
Modell 4: Der Vater fährt mit dem Auto nach Aachen und nimmt dann den Fernbus.
Modell 5: Der Vater fährt mit dem Auto nach Aachen und macht Carsharing nach Köln.
…

5.2.6 Sachaufgaben und Rechnungen einander zuordnen

[32] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , (S. 50). Graz: Leykam.
[33] Franke, M. & Ruwich, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. 2. Auflage*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
[34] Maaß, K. (2007). S. 74.

Beispiel „Rechengeschichten"[35]

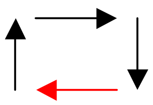
3 · 150 g = 450 g

Welche Rechengeschichten passen zu dieser Rechnung? Kreuze an!

A:	Eine Birne wiegt 150 g, ein Apfel um 3 g mehr.	○
B:	Eine Birne wiegt 150 g, eine Grapefruit wiegt drei Mal so viel.	⊗
C:	Martin kauft drei Äpfel, ein Apfel wiegt 150 g.	⊗
D:	Drei Schokoriegel wiegen zusammen 150 g.	○
E:	Martin und seine 2 Brüder essen jeweils 150 g Schokolade.	⊗
F:	Martin, Lilli und Willi essen zusammen 150 g Schokolade.	○
G:	Martin kauft 150 g Extrawurst, 150 g Schinkenwurst und 150 g Käsewurst.	⊗

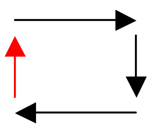
Abb. 73: Rechengeschichten (Alois, 3. Schulstufe)

5.3 Vom mathematischen Modell zur Lösung



Wenn die Schüler das mathematische Modell fixiert haben, führen sie die entsprechenden mathematischen Tätigkeiten (z.B. Kopfrechnen, schriftliche Rechenverfahren, überschlagendes Rechnen, Vergleichen, Schätzen, Erstellen von Zeichnungen) durch. Diese Formen des Stützpunktwissens müssen eventuell situativ eingeübt werden.

5.4 Von der Lösung zum Sachproblem



5.4.1 Interpretieren

Die Lösung einer mathematischen Modellierung kann eine Zahl, aber auch eine Tabelle oder ein Graf sein. Derartige mathematische Botschaften müssen die Schüler entschlüsseln, also interpretieren lernen. Um dies gesondert zu üben, kann man Schülern Grafen und Tabellen aus ihrem Lebensalltag geben.

Beispiele: Fahrpläne lesen, Wetterkarten deuten, Sporttabellen lesen, Werbungen vergleichen, …

5.4.2 Validieren

Beispiel 1: Straßenschild[36]

[35] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , (S. 52). Graz: Leykam.

Anna fährt von der A8 bei Leonberg ab und sieht das Verkehrsschild.
„Schau mal", erklärt Anna ihrem kleinen Bruder, „das Schild zeigt, dass Weil und Sindelfingen 27 km voneinander entfernt sind, weil man in die entgegengesetzte Richtung fahren muss."
Was meinst du dazu?

Beispiel 2: Zahnputzaufgabe[37]

Kleine Tricks verändern die großeWelt

Die Bewegung »We are what we do« bietet für den Anfang 50 Tipps ohne erhobenen Zeigefinger

Die Tatsache ist ebenso alt wie aktuell: Wenn eine Familie das ganze Jahr über beim Zähneputzen das Wasser anlässt, gehen insgesamt rund 26 000 Liter kostbares Nass verloren.

Aus: Schwarzwälder Bote: Ausgabe Rottweil, Wochenendjournal vom 16.3.06

[36] Maaß, K. (2007). S.87.
[37] Maaß, K. (2007). S.90.

5.5 Synthese[38]

5.5.1
- Texte erschließen und wiedergeben
- Bilder deuten, Grafiken interpretieren
  Textstellen markieren/wegstreichen
- Fragen zur Sachaufgabe stellen,
  Sachverhalte szenisch darstellen,
  Sachverhalte zeichnerisch darstellen
- fehlende Angaben im Text sinnvoll
  ergänzen
  ...

Sachproblem → Situationsmodell

5.1.4
- Lösung auf Situation zurückführen/hinterfragen
- Antworten auf Fragen beziehen: z.B. Plausibilität, sprachlicher Kontext
- Lösungswege vergleichen/hinterfragen

...

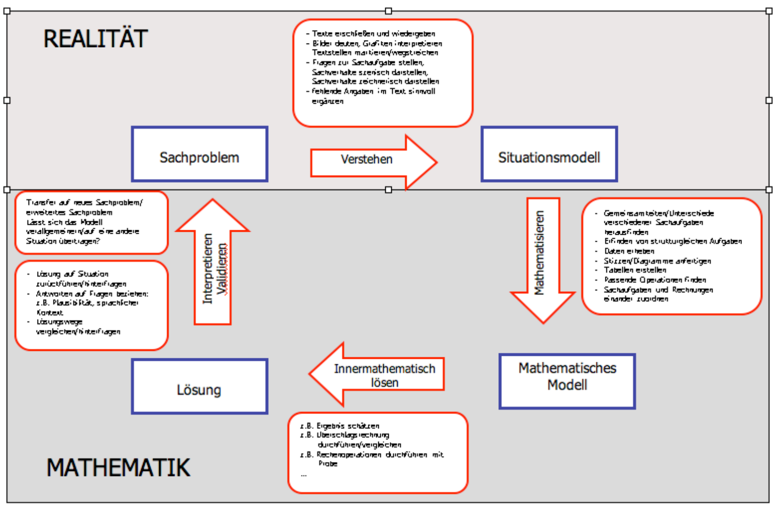
Bearbeitungshilfen

5.1.2
- Gemeinsamkeiten/Unterschiede verschiedener Sachaufgaben herausfinden
- Erfinden von strukturgleichen Aufgaben
- Daten erheben
- Skizzen/Diagramme anfertigen
- Tabellen erstellen
- Passende Operationen finden
- Sachaufgaben und Rechnungen einander zuordnen

Lösung ← Mathematisches Modell

5.1.3
z.B. Ergebnis schätzen
z.B. Überschlagsrechnung durchführen/vergleichen
z.B. Rechenoperationen durchführen mit Probe
...

Der Modellierungsprozess



Arbeitsvorlage „Der Modellierungsprozess“ im Anhang 2.

[38] BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren“*, (S. 38). Graz: Leykam.

6. Evaluation

Als Lehrer muss man sich mit den Schülerlösungen im Hinblick auf zwei Zielsetzungen beschäftigen. Zum einen geht es um die Diagnostik der Schülerleistungen, um entsprechende Fördermaßnahmen im Unterricht einzuleiten, zum anderen geht es natürlich um die Bewertung der Schülerleistung.

6.1 Diagnostik

Dieser Bogen orientiert sich an den Teilkompetenzen des Modellierungsprozesses (siehe Skizze 2.2 Modellierungsprozess). Er ermöglicht einerseits festzustellen, ob möglicherweise die ganze Klasse noch in einem Bereich Schwierigkeiten hat – vielleicht weil dieser bislang im Unterricht unbewusst vernachlässigt wurde - andererseits kann man aber auch deutlich feststellen, ob einzelne Schüler in bestimmten Bereichen noch Schwierigkeiten haben und sie gegebenenfalls in diesem Bereich intensiver fördern. Neben den oben genannten Hilfestellungen sollte man den Schülern also auf einer Metaebene gezielt Rückmeldungen geben. Dies kann mithilfe des persönlichen Diagnostikbogens (pro Aufgabe, pro Trimester) geschehen.
Eine aussagekräftige Diagnostik ist nur dann möglich, wenn regelmäßig (Teil-)Modellierungsaufgaben durchgeführt werden.

Mit diesem Bogen[39] können ein gesamter Modellierungsprozess, aber auch die Teilkompetenzen begutachtet werden. Des Weiteren ist es möglich, die Umsetzung der Kernkompetenzen und der Metakognition zu beurteilen. Die nachstehenden Leitfragen dienen sowohl bei der Diagnose als auch der Bewertung.

Name	Aufgabe												
	Ganzer Modellierungsprozess ☐ Teilkompetenzen ☐							Kernkompetenzen					Metakognition
	Problem verstehen	Aufstellen eines Situationsmodells	Aufstellen eines mathematischen Modells	Problem innermathematisch lösen	Lösung interpretieren/validieren	Vorgehen dokumentieren	Zielgerichtetes Arbeiten	Modellieren	Probleme lösen	Argumentieren	Strukturieren	Kommunizieren	
Max													
Lisa													
…													

Legende: + gute Leistung, ● mittlere Leistungen, - wenig angemessene Leistung.

[39] Maaß, K. (2007). S. 38.

Leitfragen zur Diagnostik und Bewertung

Problem verstehen	Kann das Kind die Aufgabe mit eigenen Worten wiedergeben?	
Aufstellen des Situationsmodells	Kann das Kind - die Informationen ordnen; - sinnvolle Annahmen treffen; - den zentralen Punkt erfassen und formulieren; - eine angemessene (vereinfachte) Problemfrage formulieren?	
Aufstellen des mathematischen Modells Innermathematisches Lösen	- Wurden die relevanten Größen und Beziehungen richtig mathematisiert? - Verwendet das Kind geeignete Rechenoperationen? - Wurde eine adäquate mathematische Notation gewählt? - Wurden mathematisches Wissen und heuristische Strategien (Skizzen, Tabellen, systematisches Ausprobieren, …) richtig angewendet? - Ist das Ergebnis mathematisch korrekt (Gebrauch der Maßeinheit, richtige Zahl bei der Lösung)?	
Interpretation/ Validierung der Lösung	- Kann das Kind die mathematische Lösung auf die Realität beziehen (also interpretieren)? - Ist diese Interpretation korrekt? - Überlegt das Kind, ob das Ergebnis sinnvoll ist, indem es z.B. Vergleichswerte mit einbezieht?	
Dokumentation des Vorgehens	Kann das Kind die einzelnen Schritte des Vorgehens beschreiben und erläutern?	
Zielgerichtetes Vorgehen	Geht das Kind zielgerichtet beim Modellieren vor oder verliert es sich in Details, ohne ein Ergebnis zu erreichen?	
Metakognition	Ist das Kind fähig, - selbstständig die Teilschritte des Modellierungsprozesses anzuwenden, kritisch zu reflektieren und eventuell auf andere Aufgaben zu übertragen? - seine Fehler zu hinterfragen und die notwendigen Schlüsse zu ziehen? - seine Stärken und Schwächen einzuschätzen?	

6.2 Bewertung

Modellierungsaufgaben müssen auch Gegenstand der Leistungsmessung sein. Dazu gibt es viele verschiedene Möglichkeiten: Gruppenarbeiten, Partnerarbeit, Einzelarbeit, Präsentationen, Vorträge, Klassenarbeit,…
Die Erfahrung zeigt, dass die Schüler auch Modellierungsaufgaben in Klassenarbeiten gut bearbeiten können, wenn diese Aufgaben vorher im Unterricht thematisiert wurden und wenn der Umfang der Aufgabe angemessen ist.
Neben dem Erstellen eines Erwartungshorizontes sollte man sich vorab Bewertungskriterien überlegen und diese den Kindern transparent machen. Die einzelnen Kriterien sollten zum Beispiel durch Punkte, Noten, … gewichtet werden.
Welche Kriterien und welche Gewichtung im Einzelnen gewertet werden, hängt von der Aufgabenstellung, dem vorangegangenen Unterricht und den Zielsetzungen des Unterrichtenden ab.

Ein Bewertungsschema[40] mit Punkten könnte wie folgt aussehen:

Aufstellen des Situationsmodells	0-10 Punkte
Aufstellen des mathematischen Modells Innermathematisches Lösen	0-10 Punkte 0-5 Punkte
Interpreation/Validierung der Lösung	0-5 Punkte
Dokumentation des Vorgehens	0-10 Punkte
Zielgerichtetes Vorgehen	0-10 Punkte
Insgesamt	Max. 50 Punkte

[40] Maaß, K. (2007). S. 40.

7. Literaturliste

BÜCHER

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, N., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K-J., Weiß, M. (2001). *Pisa 2000, Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Büchter A, Leuders T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln*. Berlin: Cornelsen.

Cukrowicz, J. & Zimmermann, B. (2000): *MatheNetz 8, Ausgabe N.* Braunschweig: Westermann.

Franke, M. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Franke, M. & Ruwich, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. 2. Auflage*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Herget, B., Jahnke, T. & Kroll, W. (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen.

Humenberger, H. (2003). *Dreisatz einmal anders: Aufgaben mit überflüssigen bzw. fehlenden Angaben.* (S. 49). Hildesheim Berlin: Franzbecker.

Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren*. Berlin: Cornelsen.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel, S. 42.

ZEITSCHRIFTEN

BIFIE (Hrsg.) (2012). *Themenheft Mathematik „Modellieren"* , Graz: Leykam.

BlomhØj, M. & Jensen, H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications*, 22 (3).

Sjuts, J. (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. *Journal für Mathematikdidaktik*, 24 (1), 18 – 40.

Skerra, C. & Kamps, M. (2012). Besuch von Herrn Fermi. *Grundschule 10 – 2012.*

INTERNETSEITE

Wikipedia. (2015). *Fermi-Problem*. Verfügbar unter: http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem [16.03.2015]

NACHSCHLAGEWERK

Duden. Definitionen: verfügbar unter http://www.duden.de/suchen/dudenonline/